144

INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

RICHARD GRAMMEL

XVII. BAND 1949

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.

INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVII. BAND ERSTES UND ZWEITES HEFT 1949

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Preis M 26.40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule
Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Stuttgart N, Roseggerweg 8
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Klotter, Karl, Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen. Mit 61 Textabbildungen *(Karlsruhe, 28. 12. 1901)* 1

Fadle, Johann, Eine einfache vektoranalytische Ableitung der Grundgleichungen der Elastomechanik für orthogonale, krummlinige Koordinaten. Mit 2 Textabbildungen *(Teschen [Olsagebiet], 20. 12. 1908)* 62

Swida, Waldemar, Über die Formänderungen der Balken im elastisch-plastischen Zustand. Mit 14 Textabbildungen *(Borissow b. Wilna, 28. 1. 1903)* 71

Richter, Wilhelm, Über eine Formel für Gleichdruckgebläse. Mit 3 Textabbildungen *(Aussig, 24. 9. 1903)* 88

Riegels, Fritz, Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen (II. Mitteilung). Mit 2 Textabbildungen *(Mülheim/Ruhr, 17. 6. 1910)* 94

Grammel, Richard, Scherprobleme. Mit 26 Textabbildungen *(Klosterreichenbach, 3. 3. 1889)* 107

Schunck, Theo-Ernst, Die quadratische Platte bei Schubbelastung oberhalb der Beulgrenze. Mit 5 Textabbildungen *(Nürnberg, 8. 6. 1908)* 119

Rotta, Julius, Zur Statik des Luftreifens. Mit 21 Textabbildungen *(Elberfeld, 1. 1. 1912)* 129

Woinowsky-Krieger, Sergius, Berechnung einer auf elastischem Halbraum aufliegenden, unendlich erstreckten Platte. Mit 4 Textabbildungen *(Petersburg, 25. 12. 1895)* 142

Zerna, Wolfgang, Beitrag zur allgemeinen Schalenbiegetheorie. Mit 5 Textabbildungen *(Berlin, 11. 10. 1916)* 149

INGENIEUR-ARCHIV

XVII. BAND ERSTES UND ZWEITES HEFT 1949

Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen.

Von K. Klotter.

A. Die untersuchten Gebilde, Voraussetzungen und grundsätzliche Überlegungen.

I. Voraussetzungen und Aufgabenstellung; Bezeichnungen.

1. Die „Abbildung" des wirklichen Systems auf ein Ersatzsystem; die Aufgabenstellung: Aufsuchung der Eigenfrequenzen. Unter der Fülle von dynamischen Problemen, die die Kolbenmaschine darbietet, ordnet sich eine sorgfältig zu beachtende und auch schon in weitem Maße erforschte Gruppe unter das Stichwort „Torsionsschwingungen". Das mechanische Gebilde, das dabei untersucht werden muß, ist recht verwickelt gebaut. Es besteht aus einer Kurbelwelle mit oft vielen Kröpfungen, an deren jede sich Pleuelstangen und Kolben anschließen; der gekröpfte Teil der Kurbelwelle setzt sich dann entweder unmittelbar oder unter Zwischenschaltung von Getrieben, in denen sich die Wellenleitung oft noch verzweigt, fort in einer glatten Welle, die rein rotierende Körper (Schwungräder, Treibschrauben u. dgl.) trägt. Das Ganze wird oft zudem absichtlich nachgiebig gelagert.

Es ist verständlich, daß man die Fülle der hierbei auftretenden Bewegungsmöglichkeiten nur dadurch einer rationellen Untersuchung zugänglich machen kann, daß man das vorgegebene Gebilde schrittweise so weit vereinfacht, bis es mit einem erträglichen Aufwand behandelbar wird. Anders ausgedrückt: Man muß an die Stelle des wirklich vorliegenden Gebildes ein geeignet gewähltes Ersatzsystem treten lassen, oder kürzer gesagt: Man muß das wirkliche Gebilde auf ein Ersatzsystem „abbilden". Dieses Ersatzsystem muß selbstverständlich so beschaffen sein, daß es noch die wesentlichen Züge der zu untersuchenden Erscheinungen zeigt. Je nach dem Gesichtspunkt, unter dem ein Vorgang studiert werden soll, wird man unter Umständen verschiedene Ersatzsysteme für das wirkliche Gebilde zu wählen haben.

Die erste Voraussetzung (oder Einschränkung), die wir hier machen wollen, sei die, daß die Lager des Motors selbst starr seien und daß sie starr mit einer starren Unterlage verbunden werden. Elastische Nachgiebigkeit soll also nur der Welle (Kurbelwelle) selbst zukommen. Dieses elastische Gebilde mit seinen Anhängseln an verschiedenartig bewegten Teilen (Pleueln und Kolben) möge nun abgebildet werden auf (ersetzt werden durch) eine glatte Welle, die Scheiben von zeitlich unveränderlichen (konstanten) Trägheitsmomenten trägt. Die so formulierte „Abbildungsaufgabe" schließt zwei Teilaufgaben in sich: Erstens die Frage nach den Trägheitsmomenten der Scheiben, die die beweglichen, hin und her gehenden Getriebeteile möglichst gut ersetzen, zweitens die Frage nach der Länge der glatten Wellenstücke (gegebener Torsionssteifigkeit), die die Kröpfungen möglichst gut ersetzen. Von der ersten Aufgabe spricht man auch als der „Reduktion der Massen", von der zweiten als der „Reduktion der Längen".

Mathematisch gesprochen handelt es sich dabei um folgendes: Die Bewegungsgleichungen der Torsionsschwingungen einer glatten Welle, die Scheiben von zeitlich konstantem Trägheitsmoment trägt, bestehen (wie wir bald noch zeigen werden) aus einem System von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die überdies in einer ganz speziellen Weise gekoppelt sind, nämlich so, daß die nicht abgeleiteten Veränderlichen außer in der Hauptdiagonalen nur in den beiden benachbarten Diagonalen auftreten (siehe die Gleichungen (4.2)). Die beiden Abbildungsaufgaben verlangen nun, die konstanten Koeffizienten des Differentialgleichungssystems zu ermitteln.

Es läßt sich allerdings zeigen, daß beide Aufgaben, sowohl die der Reduktion der Massen wie auch die der Reduktion der Längen, sich streng überhaupt nicht lösen lassen. Denn die hin- und hergehenden Teile (Pleuel und Kolben), die sich an eine Kröpfung anschließen, bedingen zeitlich veränderliche Koeffizienten der Differentialgleichungen[1]. Ferner läßt sich eine Kurbel-

[1] *E. Trefftz*, Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen. Aachener Vorträge. Berlin 1930. — *F. Kluge*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 119. — *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 591.
Zusammenfassend: *R. Grammel*, Über einige dynamische Probleme bei Kolbenmaschinen, Schriften d. Deutschen Akad. f. Luftfahrtforschung, Heft 5, 1939.

welle, die nicht nur durch reine Drehmomente belastet wird, sondern die, ihrem Wesen und ihrer Bestimmung nach, Kräfte auf die Kurbelzapfen erfährt, streng nicht auf eine glatte Welle abbilden. Das wirkliche System der Differentialgleichungen enthält somit nicht nur die oben genannten „Kopplungsglieder", sondern alle überhaupt möglichen. Diese Erkenntnis verdankt man den Untersuchungen von *R. Grammel*[1], in denen die Begriffe „Torsion erster Art", „Torsion zweiter Art", „Haupttorsionen" und „Nebentorsionen" geprägt wurden.

An diese Untersuchungen hat sich eine oft heftige Diskussion angeschlossen, die ihren Niederschlag allerdings nur zu einem geringen Teil im Schrifttum fand[2]. Über die strittigen Punkte brachte dann eine Untersuchung von *A. Kimmel*[3] Aufklärung. Eine zusammenfassende Darstellung des Problems der „Reduktion der Längen" gab schließlich der Verfasser[4].

Mit den genannten, vom Standpunkt unserer Aufgabe aus vorbereitenden Untersuchungen befassen wir uns hier nicht. Wir gehen vielmehr unmittelbar aus von den schon linearisierten Bewegungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die in der erwähnten speziellen Weise gekoppelt sind.

Betrachtet man die Bewegungen, die unter dem Einfluß der auf die Kurbelzapfen wirkenden, periodisch veränderlichen Tangentialkräfte zustande kommen, so hat man es mit erzwungenen Schwingungen zu tun; die sie beschreibenden Differentialgleichungen weisen „Störglieder" auf. Trotzdem können wir Aufklärung über viele wesentliche Punkte schon erhalten, wenn wir die freien (oder Eigen-) Schwingungen allein betrachten, die durch die verkürzten (homogenen) Differentialgleichungen beschrieben werden. Diese homogenen Gleichungen liefern vor allem die Eigenfrequenzen, das sind jene Frequenzen, mit denen das torsionsschwingungsfähige System freie harmonische Schwingungen ausführen kann. Von Bedeutung sind diese Eigenfrequenzen deshalb, weil sie jene Frequenzen bezeichnen, bei denen die erzwungenen Ausschläge über alle Grenzen wachsen würden. Da Betriebszustände, bei denen solche über alle Grenzen gehenden Ausschläge auftreten würden, ausgeschlossen werden müssen, bedeutet die Bestimmung der Eigenfrequenzen die wichtigste Feststellung, die hinsichtlich der Eigenschaften eines torsionsschwingungsfähigen Systems zunächst zu leisten ist. Mit dieser Aufgabe beschäftigen wir uns in diesem Bericht allein.

Die Berechnung der erzwungenen Schwingungen selber wird auch deshalb oft gar nicht ausgeführt, weil — wenigstens in der Nähe der durch die Eigenfrequenzen bezeichneten „Resonanzstellen" — die Ausschläge wesentlich von den Widerstands- oder Dämpfungskräften abhängen. Diese Dämpfungskräfte sind bisher nur in sehr unvollkommener Weise erforscht worden. Grundsätzlich wirken in ihnen die Einflüsse von Lagerreibung, Luftreibung und Werkstoffdämpfung zusammen. Eine rechnerische Untersuchung hätte überdies nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn diese „Dämpfungskräfte" (wie wir sie zusammenfassend nennen wollen), linear von der Schwingungsgeschwindigkeit abhingen oder sich genügend genau in dieser Weise darstellen ließen. Die wirkliche Abhängigkeit ist sicher nicht linear; die Frage, wie weit lineare Ersatzkräfte gefunden werden können, ist noch offen. Eine genaue Untersuchung der erzwungenen Schwingungen erübrigt sich aber, wie gesagt, in der Regel deshalb, weil weit außerhalb der Resonanz die Ausschläge ungefährlich bleiben, in der Nähe der Resonanzstellen aber so groß werden, daß sie ohnehin nicht zugelassen werden dürfen. Notwendig, in der Regel aber auch genügend, ist deshalb die Ermittlung der Resonanzstellen selber, d. h. der Eigenfrequenzen. Diese Eigenfrequenzen werden durch die Dämpfungskräfte nur ganz unwesentlich beeinflußt, so daß wir berechtigt sind, sie ohne Berücksichtigung der Dämpfungskräfte zu bestimmen.

Unsere Aufgabe besteht daher in der Ermittlung der Eigenfrequenzen eines dämpfungsfreien, torsionsschwingungsfähigen Gebildes, das aus glatten Wellenstücken mit aufgesetzten Scheiben konstanter Trägheitsmomente aufgebaut ist.

2. Das Ersatzsystem, Bezeichnungen. Das mechanische System, das allen weiteren Untersuchungen zugrunde liegt, zeigt Abb. 1. Es besteht aus $n+1$ Scheiben vom (Massen-) Trägheitsmoment Θ_λ ($\lambda=0,1,2\ldots n$), zwischen denen sich n glatte, zylindrische, trägheitsfreie Wellenstücke von der Länge l_λ ($\lambda=1,2\ldots n$) befinden. Die zugehörigen Torsionssteifigkeiten sind $c_\lambda=G\,J_p/l_\lambda$;

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 287. — *R. Grammel, K. Klotter, K. v. Sanden*, Ing.-Archiv 7 (1936) S. 439.

[2] *J. Meyer*, Luftfahrtforschung 17 (1940) S. 54. — *R. Grammel*, Ing.-Arch. 11 (1940) S. 149.

[3] *A. Kimmel*, Ing.-Arch. 10 (1939) S. 196.

[4] *K. Klotter*, Z. VDI. 85 (1941) S. 558.

dabei bedeutet G den Gleitmodul des Wellenbaustoffes, J_p das polare (geometrische) Trägheitsmoment des kreis- oder kreisringförmigen Wellenquerschnitts.

Manche Autoren benutzen als Ersatzsystem ein solches, wie es die Abb. 2 zeigt. Der Unterschied gegenüber dem der Abb. 1 besteht darin, daß an Stelle der Scheiben vom Trägheitsmoment Θ_λ jeweils zwei Massen $m_\lambda/2$ auftreten, die am Hebelarm r (für den in der Regel der Kurbelradius gewählt wird) sitzen. Es gilt dann $\Theta_\lambda = m_\lambda r^2$. In diesem Bericht wird (ohne Rücksicht darauf, wie die Autoren selbst bezeichnen) stets das System der Abb. 1 verwendet.

Der Drehwinkel einer Scheibe Θ_λ gegenüber einer raumfesten Ausgangslage wird mit φ_λ bezeichnet. Dieser Winkel setzt sich zusammen aus einem von der gleichförmigen Rotation der Welle mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 herrührenden Anteil $\omega_0 t$ und dem Ausschlag ϑ_λ der darüber gelagerten Schwingung:

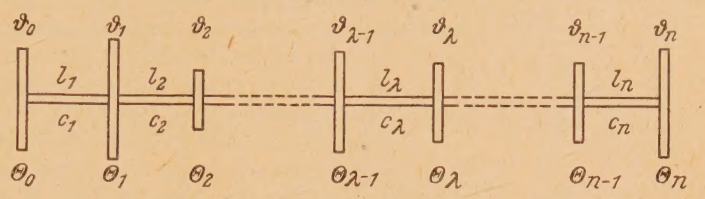


Abb. 1. Schema des untersuchten Schwingers.

$$\varphi_\lambda = \omega_0 t + \vartheta_\lambda \,. \tag{2.1}$$

Verläuft die Ausschlag-Zeit-Funktion eines solchen Winkels ϑ_λ harmonisch mit einer Kreisfrequenz ω, so wird angesetzt

$$\vartheta_\lambda = u_\lambda \cos \omega t \,; \tag{2.2}$$

u_λ bezeichnet also die Amplitude des mit der Kreisfrequenz ω harmonisch veränderlichen Winkels ϑ_λ.

Das Drillungsmoment in einem Wellenstück l_λ wird mit D_λ bezeichnet, es ist

$$D_\lambda = c_\lambda (\vartheta_{\lambda-1} - \vartheta_\lambda) \,. \tag{2.3}$$

Das Drillungsmoment wird demnach positiv gerechnet, wenn der Ausschlag der das Wellenstück links begrenzenden Scheibe größer ist als der der rechten. Das heißt aber, ein positives Drillungsmoment sucht die weiter rechts liegende Scheibe nach „vorn" (d. h. im Sinne wachsender ϑ) zu drehen, die links liegende zurückzuholen.

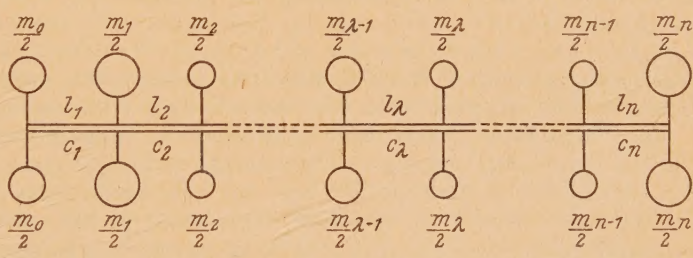


Abb. 2. Zweite Darstellung des Schwingers.

Betrachtet man links von Θ_0 und rechts von Θ_n jeweils noch ein „überstehendes" Wellenstück, so sind die in ihnen wirkenden Drillungsmomente sinngemäß mit D_0 und D_{n+1} zu bezeichnen. Da diese Wellenstücke nicht verdreht werden können, so gilt

$$D_0 = 0 \,, \quad D_{n+1} = 0 \,; \tag{2.4a}$$

diese Gleichungen werden später Bedeutung (als „Randbedingungen") erlangen.

Ein für die Drillungsmomente notwendiger „harmonischer Ansatz" wird in der Form

$$D_\lambda = x_\lambda \cos \omega t \tag{2.5}$$

vorgenommen; x_λ bezeichnet also die zur Kreisfrequenz ω gehörige Amplitude eines harmonisch veränderlichen Drillungsmomentes D_λ. Wegen (2.4a) gilt auch

$$x_0 = 0 \,, \quad x_{n+1} = 0 \,. \tag{2.4b}$$

Wir erwähnen hier nun noch andere Bezeichnungen und Abkürzungen, deren wir uns im weiteren Verlauf der Untersuchung mit Vorteil bedienen werden. Mit k_λ und k'_λ werden die Quotienten

$$k_\lambda = \frac{c_\lambda}{\Theta_{\lambda-1}} \,, \qquad k'_\lambda = \frac{c_\lambda}{\Theta_\lambda} \tag{2.6}$$

bezeichnet werden. Diese Größen lassen sich deuten als die Frequenzquadrate (Quadrate der

Kreisfrequenz) von „Teilsystemen", wie sie in Abb. 3 angegeben sind. Das Frequenzquadrat ω^2 selbst werden wir oft durch z bezeichnen:

$$\omega^2 = z\,. \tag{2.7}$$

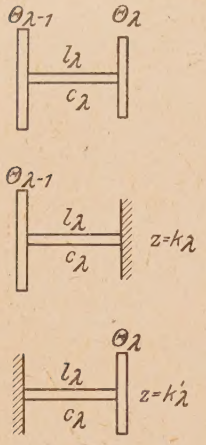


Abb. 3. Teilsysteme.

II. Die Lösungsverfahren; ihre Einteilung in zwei Klassen.

3. Untersuchte Verfahren; Ziel der Darstellung. Die am Ende von Abschnitt **1** genannte Aufgabe der Ermittelung der Torsionseigenfrequenzen (und -schwingungsformen) für das in Abschnitt **2** beschriebene Ersatzsystem hat in den vergangenen vierzig Jahren eine fast unübersehbare Fülle von Lösungsvorschlägen hervorgerufen. Die Entwicklung ist jetzt zu einem gewissen Abschluß gekommen; es scheint daher gerechtfertigt, einen zusammenfassenden Überblick über das Erreichte zu geben.

Aus der großen Zahl von vorgeschlagenen Verfahren werden hier nur jene erörtert, die entweder in irgendeiner Weise das Problem wesentlich gefördert haben, oder die sonstwie der Beachtung wert sind. Die demgemäß in Betracht gezogenen Verfahren und Vorschläge sind in chronologischer Folge in einer Liste am Schluß des Aufsatzes verzeichnet. Mit der in eckige Klammern gesetzten laufenden Nummer dieses Verzeichnisses werden die Verfahren hier weiterhin stets zitiert.

Das Ziel, das wir mit unserer Darstellung verfolgen, besteht aber nicht in einer solchen chronologischen Aufzählung. Wir wollen vielmehr die verschiedenen Verfahren einer systematischen Betrachtung unterwerfen, sie insbesondere daraufhin untersuchen, worin der jeweilige Grundgedanke besteht, und wie der betreffende Vorschlag mit anderen Vorschlägen zusammenhängt, auf solchen aufbaut, oder sonstwie Berührungspunkte mit ihnen aufweist. Es kann deshalb auch nicht Aufgabe dieses Berichtes sein, die Verfahren mit „historischer Treue" zu beschreiben, das heißt, genau dieselbe Beweisführung, womöglich mit denselben Bezeichnungen, anzuwenden, wie sie der jeweilige Autor benutzt. Im Gegenteil: Zur Sicherung des eigentlichen Zieles, nämlich der Herausarbeitung der gedanklichen Entwicklungslinie, die durch die verschiedenen Verfahren und Vorschläge bezeichnet wird, erweist es sich als notwendig, alle diese Verfahren und Vorschläge unter gemeinsamen Gesichtspunkten und mit einer gemeinsamen, zweckmäßig gewählten Bezeichnungsweise darzustellen, eben unter Befreiung von den spezifischen Eigentümlichkeiten in den Darstellungen der einzelnen Verfasser.

Dem genannten Ziel dient es auch, daß die aufgeführten Beispiele nicht den Originalarbeiten entnommen wurden, daß sie vielmehr sämtlich neu gebildet und neu berechnet worden sind. Wo immer es angängig war und den Voraussetzungen entsprach, wurde ein und derselbe Schwinger als Beispiel für verschiedene Verfahren gewählt, eben um den Vergleich der Verfahren untereinander zu erleichtern und dadurch sowohl Gemeinsamkeiten wie auch Unterschiede um so deutlicher hervortreten zu lassen.

Zunächst können wir feststellen, daß alle die aufgezählten Verfahren sich in zwei große Klassen einordnen lassen. In die erste Klasse gehören jene, die unmittelbar an die Bewegungsgleichungen des Ersatzsystems, oder vielmehr an das aus diesen Bewegungsgleichungen durch den „Hauptschwingungsansatz" hervorgehende System von algebraischen Gleichungen, anschließen. Die zweite Klasse umfaßt dann jene Verfahren, die Gebrauch machen von einem Gedanken der „Aufteilung" des Schwingers in Teilsysteme, einer Aufteilung, die so vorgenommen wird, daß jedes der Teilsysteme die gleiche Eigenfrequenz aufweist wie der ungeteilte Schwinger selbst. In Abschnitt **4** werden wir demgemäß zunächst die Bewegungsgleichungen und das aus ihnen hervorgehende System der homogenen algebraischen Gleichungen herleiten, das dann den Ausgangspunkt der Verfahren der ersten Klasse bildet, in Abschnitt **5** erörtern wir den soeben erwähnten Gedanken der „Aufteilung" genauer, in Abschnitt **6** zeigen wir dann noch, daß das Verfahren der Aufteilung in der Tat gleichwertig ist mit der Benutzung der Bewegungsgleichungen.

4. Die Bewegungsgleichungen für die freien Torsionsschwingungen. Das schwingungsfähige Gebilde, um das es sich handelt, ist in Abb. 1 schon dargestellt, die verwendeten Bezeichnungen sind in Abschnitt **2** ebenfalls schon aufgeführt. Die Bewegungen des genannten Schwingers werden beherrscht von zwei Gruppen von Gleichungen: erstens den dynamischen Gleichungen

$$\Theta_\lambda \ddot{\vartheta}_\lambda = D_\lambda - D_{\lambda+1} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n) \tag{4.1a}$$

mit

$$D_0 = 0\,, \quad D_{n+1} = 0\,,$$

zweitens den elastischen Gleichungen (die schon in (2.3) angegeben sind)

$$D_\lambda = c_\lambda (\vartheta_{\lambda-1} - \vartheta_\lambda) \,. \tag{4.1b}$$

Setzt man die Gleichungen (4.1b) in (4.1a) ein (d. h. eliminiert man die Drillungsmomente), so findet man die in den Ausschlägen allein geschriebenen Gleichungen

$$\Theta_\lambda \ddot{\vartheta}_\lambda - c_\lambda \vartheta_{\lambda-1} + (c_\lambda + c_{\lambda+1}) \vartheta_\lambda - c_{\lambda+1} \vartheta_{\lambda+1} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n) \,, \tag{4.2}$$

wenn $c_0 = 0$ und $c_{n+1} = 0$ gesetzt werden.

Wegen der besonderen Bauart der Gleichungen (4.2), insbesondere wegen des Fehlens von Gliedern, die von Dämpfungskräften herrühren, läßt sich die Integration mit Hilfe des „Hauptschwingungsansatzes“

$$\vartheta_\lambda = u_\lambda \cos \omega t \tag{4.3}$$

durchführen. Das System der Differentialgleichungen (4.2) geht dann über in das System der algebraischen Gleichungen

$$-c_\lambda u_{\lambda-1} + (c_\lambda + c_{\lambda+1} - \Theta_\lambda z) u_\lambda - c_{\lambda+1} u_{\lambda+1} = 0 \quad (\lambda = 0, 1 \ldots n) \tag{4.4}$$

mit

$$c_0 = 0 \,, \quad c_{n+1} = 0 \,.$$

Die Gleichungen (4.4) kennzeichnen das in Abschnitt 1 schon formulierte „Eigenwertproblem“: Es sind jene Werte z („Eigenwerte“) aufzusuchen, bei denen die homogenen Gleichungen (4.4) miteinander verträglich sind. Die Bedingungen dafür, daß diese homogenen algebraischen Gleichungen miteinander verträglich sind, daß das Gleichungssystem (4.4) also eine von Null verschiedene Lösung zulasse, ist das Verschwinden der Determinante ihrer Koeffizienten,

$$\begin{vmatrix} c_1 - \Theta_0 z & -c_1 & 0 & 0 & & \\ -c_1 & c + c_2 - \Theta_1 z & -c_2 & 0 & & \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - \Theta_2 z & -c_3 & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n - \Theta_{n-1} z & -c_n \\ & & & & -c_n & c_n - \Theta_n z \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{4.5}$$

Die Gleichung (4.5) ist zunächst eine algebraische Gleichung vom Grade $n+1$ in z, oder nach Abspaltung der Wurzel $z=0$ eine algebraische Gleichung n-ten Grades in z. Sie heißt die „Frequenzengleichung“. Ihre n positiven Wurzeln z sind die n Eigenwerte des Problems, sie bestimmen die n gesuchten Eigenfrequenzen des Schwingers. Das System homogener Gleichungen (4.4) hat für die n Eigenwerte z jeweils einen Satz von Null verschiedener Lösungen $u_0, \ldots u_n$. Wegen der Homogenität der Gleichungen sind diese Lösungen nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt; oder anders ausgedrückt, es sind nur die Ausschlagverhältnisse $u_0 : u_1 : u_2 : \ldots : u_n$, nicht aber die Ausschläge selbst festgelegt. Wegen (4.3) ist das Verhältnis der Amplituden u gleich dem Verhältnis der Ausschläge ϑ zu allen Zeiten. Dieser Tatsachen erinnern wir uns, wenn später von der „Ausschlaglinie“ der Eigenschwingungen die Rede sein wird.

Mit der Angabe der Determinantengleichung (4.5) ist die gestellte Aufgabe der Ermittlung der Eigenfrequenzen vom algebraischen Standpunkt aus gelöst. Sobald jedoch die Anzahl n der Freiheitsgrade des Schwingers nicht mehr ganz klein ist, schon wenn $n > 3$ ist, wird die Aufgabe der Aufstellung und Auswertung der Determinante zur Herstellung der algebraischen Gleichung und die Lösung dieser Gleichung recht umständlich, zeitraubend und zudem unübersichtlich. Der Zweck aller vorgeschlagenen Verfahren besteht nun darin, die Aufstellung und Lösung dieser Determinantengleichung zu umgehen und die Eigenfrequenzen in anderer Weise zu gewinnen.

Ausgangspunkt aller Verfahren der ersten Klasse bleibt dabei jedoch das System der algebraischen Gleichungen (4.4) oder auch jener Satz von Gleichungen, die aus (4.1a) bzw. (4.1b) durch Einführung des Hauptschwingungssatzes entstehen, und die lauten

$$\left.\begin{aligned} x_{\lambda+1} &= x_\lambda + \Theta_\lambda z u_\lambda \\ u_\lambda &= u_{\lambda-1} - \frac{x_\lambda}{c_\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots n) \,. \tag{4.6}$$

Selbstverständlich erhält man aus den Gleichungen (4.6) durch Elimination der x_λ wieder die Gleichungen (4.4). An (4.4) oder (4.6) schließen sich also alle Verfahren an, die wir in der ersten Klasse zusammenfassen, wenn sie auch unter sich noch weitgehende Verschiedenheiten zeigen.

5. Der Gedanke der „Aufteilung“. Außer jenen Verfahren zur Aufsuchung der Eigenfrequenzen, die an die Gleichungen (4.4) oder (4.6) anschließen, gibt es noch eine Reihe anderer. Diese weisen ihrerseits das gemeinsame Merkmal auf, daß sie Gebrauch machen von einem Gedanken, der im Jahre 1921 zugleich an verschiedenen Stellen im Schrifttum auftauchte (u. a. wurde er von *O. Föppl* [8] und *H. Wydler* [6] in jenem Jahre ausgesprochen). Die allen diesen Verfahren zugrunde liegende Idee läßt sich am deutlichsten zeigen für die Eigenschwingung mit der höchsten Frequenz (die Eigenschwingung n-ten Grades), die dadurch gekennzeichnet ist, daß auf jedem der n Wellenstücke $l_1, \ldots, l_n$ jeweils ein reeller Knoten liegt. Spaltet man (außer der ersten und der letzten Scheibe, Θ_0 und Θ_n) eine jede Scheibe Θ_λ auf in zwei Teile, in einen Teil $\Theta_{\lambda,\lambda}$, der am rechten Ende des Wellenstücks l_λ, und in einen Teil $\Theta_{\lambda,\lambda+1}$, der am linken Ende des Wellenstücks $l_{\lambda+1}$ sitzt, so zerfällt der ganze Schwinger in n Teilschwinger, die jeweils aus einem Wellenstück l_λ mit den Scheiben $\Theta_{\lambda-1,\lambda}$ und $\Theta_{\lambda,\lambda}$ bestehen (Abb. 4). Die Eigenschwingzahlen dieser Teilsysteme (Abb. 5a) lassen sich leicht angeben; es ist nämlich

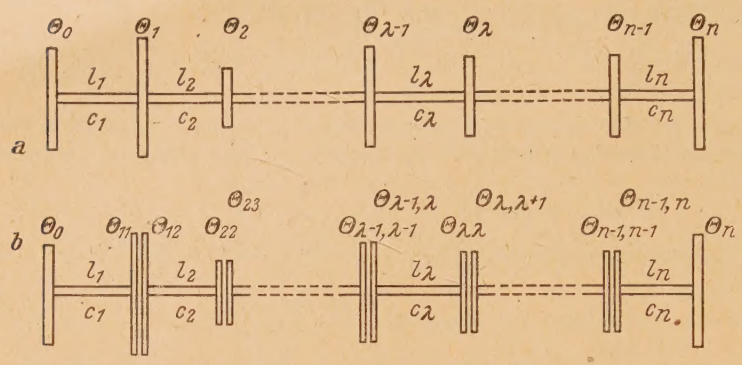


Abb. 4. Zerlegung des Schwingers in Zwei-Massen-Systeme durch Aufspaltung der Drehmassen.

$$z = c_\lambda \left[\frac{1}{\Theta_{\lambda-1,\lambda}} + \frac{1}{\Theta_{\lambda,\lambda}} \right]. \tag{5.1}$$

Die Aufsuchung einer Eigenfrequenz des gesamten Schwingers ist nun gleichwertig mit der Forderung, die Aufspaltung der Trägheitsmomente der Scheiben so vorzunehmen, daß alle diese Teilschwinger dieselbe Frequenz aufweisen. Dann schwingen sie nämlich insgesamt genau so wie der unzerlegte Schwinger. Die gemeinsame Frequenz der Teilschwinger ist damit gleich der gesuchten höchsten Frequenz des unzerlegten Schwingers.

Man kann noch weitergehen und außer der Aufspaltung der Scheiben auch eine Teilung der Wellenstücke vornehmen, also fragen, wie man die Längen $l_\lambda = l_{\lambda,\lambda-1} + l_{\lambda,\lambda}$ unterteilen muß, damit die an den Teilstellen (die dann die Knoten bezeichnen) eingespannten Teilschwinger wieder dieselbe Frequenz aufweisen. Statt einer Zerlegung in n Zwei-Massen-Systeme vom Typ der Abb. 5a handelt es sich dann (Abb. 6) um eine Zerlegung in $2n$ Ein-Massen-Systeme vom Typ der Abb. 5b. Für sie gilt natürlich

$$z = \frac{c_{\lambda,\lambda-1}}{\Theta_{\lambda-1,\lambda}} \quad \text{und} \quad z = \frac{c_{\lambda\lambda}}{\Theta_{\lambda\lambda}}. \tag{5.2}$$

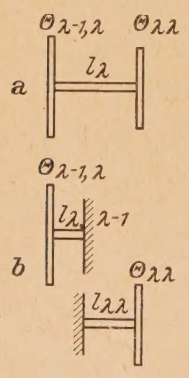


Abb. 5. Aufspaltung der Zwei-Massen-Systeme in Ein-Massen-Systeme.

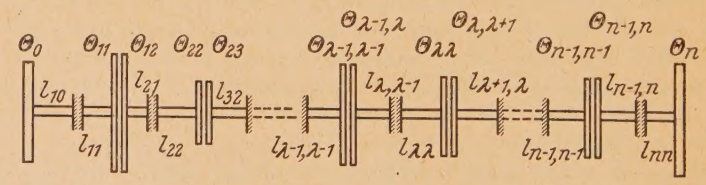


Abb. 6. Zerlegung des Schwingers in Ein-Massen-Systeme durch Aufspaltung von Drehmassen und elastischen Längen.

Eine solche Zerlegung der ganzen Welle in Teilsysteme vom Typ der Abb. 5a oder 5b ist für die höchste Schwingungsform, wo alle Knotenpunkte reell sind (d. h. auf den zugehörigen Wellenstücken l_λ tatsächlich vorhanden sind), recht anschaulich. Sie läßt sich für die niedrigeren Schwingungsformen aber ebenfalls vornehmen. Der Unterschied besteht dann nur darin, daß die Knotenpunkte nicht mehr alle reell sind, sondern zum Teil virtuell werden, d. h. sie liegen

nicht mehr auf dem Wellenstück l_λ selber, sondern rechts oder links auf seiner Verlängerung. Anders ausgedrückt: Die Summanden $l_{\lambda,\lambda-1}$ und $l_{\lambda\lambda}$ sind nicht mehr beide positiv und kleiner als l_λ; der eine Summand ist vielmehr größer als l_λ, der andere negativ. Gleichbedeutend damit ist, daß das Trägheitsmoment Θ_λ nicht mehr in zwei positive Anteile zerlegt wird, die beide kleiner sind als Θ_λ; die Aufteilung erfolgt vielmehr in zwei Summanden $\Theta_{\lambda\lambda}$ und $\Theta_{\lambda,\lambda+1}$, von denen der eine größer ist als Θ_λ, der andere negativ. Wenn auf diese Weise auch die Anschaulichkeit des Bildes stark leidet, so bleibt die Idee doch auch in diesen Fällen durchführbar. Die niedrigeren Eigenschwingzahlen [1., 2., 3.... (n 1)-ten Grades] sind dann jene, die den jeweils n bzw. 2 n Teilschwingern gemeinsam sind, wenn insgesamt 1, 2, ... (n–1) reelle Knoten vorhanden sind.

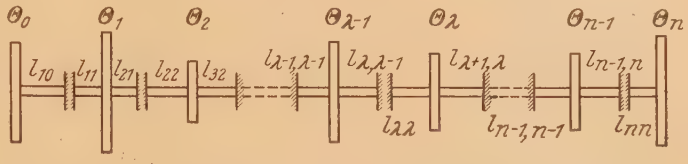


Abb. 7. Zerlegung des Schwingers in Ein-Massen-Systeme (mit eingespannten Enden) durch Aufspaltung der elastischen Längen.

Eine weitere Art der Aufteilung, die ebenfalls gelegentlich verwendet wird, zeigt Abb. 7. Hier werden nur die Wellenstücke, nicht aber die Drehmassen unterteilt. Auf dem Gedanken der Zerlegung in Teilsysteme beruhen alle jene Verfahren, die wir in der zweiten Klasse zusammenfassen und im dritten Teil dieses Berichtes erörtern.

6. Nachweis der Übereinstimmung der beiden Betrachtungsweisen. Wenn auch der Gedanke der Zerlegung in die Teilsysteme, wenigstens für die höchste Schwingzahl, recht anschaulich ist, so besteht doch das Bedürfnis, auch formal nachzuweisen, daß die auf Grund dieses Gedankenganges erzielten Ergebnisse übereinstimmen mit jenen, die aus den Bewegungsgleichungen erhalten werden. Der Nachweis dieser Übereinstimmung wird am zweckmäßigsten so geführt, daß gezeigt wird, wie die Gleichungen, die auf Grund des „Gedankens der Zerlegung" entstehen, durch Umformung in die Bewegungsgleichungen übergehen. Eine erste Darlegung in diesem Sinne stammt von *G. Zerkowitz* [7]; sie findet sich im „Nachwort" zur *Wydler*schen Monographie [6] vom Jahre 1921.

Wie schon erwähnt, werden die Trägheitsmomente der Scheiben aufgeteilt nach

$$\Theta_\lambda = \Theta_{\lambda,\lambda} + \Theta_{\lambda,\lambda+1}, \tag{6.1a}$$

die Längen der Wellenstücke nach

$$l_\lambda = l_{\lambda,\lambda-1} + l_{\lambda,\lambda}. \tag{6.1b}$$

Die Bewegungsgleichungen der Ein-Massen-Systeme, in die die ursprüngliche Welle nach Abb. 6 schließlich zerlegt worden ist, lauten dann, wenn $C = G\,J_p$ die Torsionssteifigkeit bezeichnet, der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_0\,\ddot{\vartheta}_0 &= -\frac{C}{l_{10}}\,\vartheta_0,\\
\Theta_{11}\,\ddot{\vartheta}_1 &= -\frac{C}{l_{11}}\,\vartheta_1,\\
\Theta_{12}\,\ddot{\vartheta}_1 &= -\frac{C}{l_{21}}\,\vartheta_1,\\
&\vdots\\
\Theta_{\lambda\lambda}\,\ddot{\vartheta}_\lambda &= -\frac{C}{l_{\lambda\lambda}}\,\vartheta_\lambda,\\
\Theta_{\lambda,\lambda+1}\,\ddot{\vartheta}_\lambda &= -\frac{C}{l_{\lambda+1,\lambda}}\,\vartheta_\lambda,\\
&\vdots\\
\Theta_n\,\ddot{\vartheta}_n &= -\frac{C}{l_{nn}}\,\vartheta_n.
\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Durch Addition jeweils zweier Gleichungen (die gleiche Indizes λ beim Ausschlag ϑ_λ aufweisen) entsteht

$$\Theta_\lambda\,\ddot{\vartheta}_\lambda = -C\left[\frac{1}{l_{\lambda\lambda}} + \frac{1}{l_{\lambda+1,\lambda}}\right]\vartheta_\lambda. \tag{6.3}$$

Das sind jetzt die Bewegungsgleichungen, wie sie einer Aufspaltung nach Abb. 7 entsprechen.

Für das Verhältnis der Teillängen und der Ausschläge gilt aber

$$l_{\lambda,\lambda-1} : l_{\lambda\lambda} = -\vartheta_{\lambda-1} : \vartheta_\lambda \tag{6.4a}$$

und deshalb auch

$$\frac{l_{\lambda,\lambda-1} + l_{\lambda\lambda}}{l_{\lambda,\lambda-1}} = \frac{-\vartheta_{\lambda-1} + \vartheta_\lambda}{-\vartheta_{\lambda-1}}$$

oder wegen (6.1b)

$$\frac{l_\lambda}{l_{\lambda,\lambda-1}} = \frac{-\vartheta_{\lambda-1} + \vartheta_\lambda}{-\vartheta_{\lambda-1}} . \tag{6.4b}$$

Analog gilt

$$\frac{l_{\lambda,\lambda-1} + l_{\lambda\lambda}}{l_{\lambda\lambda}} = \frac{\vartheta_{\lambda-1} - \vartheta_\lambda}{-\vartheta_\lambda}$$

oder

$$\frac{l_\lambda}{l_{\lambda\lambda}} = \frac{\vartheta_{\lambda-1} - \vartheta_\lambda}{-\vartheta_\lambda} . \tag{6.4c}$$

Unter Benutzung der Proportionen (6.4b) und (6.4c) geht (6.3) über in

$$\Theta_\lambda \ddot{\vartheta}_\lambda = -C\left[\frac{1}{l_\lambda}(\vartheta_\lambda - \vartheta_{\lambda-1}) + \frac{1}{l_{\lambda+1}}(\vartheta_\lambda - \vartheta_{\lambda+1})\right]$$

oder

$$\Theta_\lambda \ddot{\vartheta}_\lambda = C\left[\frac{1}{l_\lambda}\vartheta_{\lambda-1} - \vartheta_\lambda\left(\frac{1}{l_\lambda} + \frac{1}{l_{\lambda+1}}\right) + \frac{1}{l_{\lambda+1}}\vartheta_{\lambda+1}\right] . \tag{6.5}$$

Das sind aber wegen

$$c_\lambda = \frac{C}{l_\lambda}$$

genau die Bewegungsgleichungen (4.2). Damit ist die Übereinstimmung der beiden Betrachtungsweisen gezeigt.

III. Allgemeine Beziehungen.

Ehe wir im Teil **B** und **C** zur Erörterung der einzelnen Verfahren selber übergehen, wollen wir hier vorweg einige Bemerkungen über eine Reihe allgemeiner Beziehungen machen, von denen weiterhin immer wieder Gebrauch gemacht werden wird.

Eine große Anzahl der zu besprechenden Verfahren benutzt graphische Hilfsmittel. Jede graphische Darstellung ist gezwungen, mit bestimmten Maßstäben zu arbeiten. Die mechanischen Daten der Aufgabe werden in Strecken (oder Flächen) verwandelt, und auch das Ergebnis erscheint nach Benutzung irgendwelcher geometrischer Beziehungen und Konstruktionen wieder in Form einer Strecke (oder Fläche). Nun erhebt sich die Frage, in welchem Maßstab stellt diese Strecke (oder Fläche) die gesuchte physikalische Größe dar. Über diesen Punkt kann man in den Darlegungen einzelner Autoren den verwirrendsten Auffassungen begegnen. Wir behandeln daher diese Frage hier vorweg (Abschnitt **7**).

Ein oft verwendetes graphisches Hilfsmittel ist das sogenannte „Seileck". Auch es wird mit den verschiedenartigsten und den vorliegenden Problemen oft völlig fremden Bezeichnungen, Begründungen und Deutungen eingeführt. Dieses Hilfsmittel wollen wir hier ebenfalls auf seinen allgemeinen Gehalt zurückführen und von jeder speziellen, den vorliegenden Problemen fremden Bezugnahme befreien (Abschnitt **8**).

Dann schließen wir (in Abschnitt **9**) noch einige Erörterungen über „gleichwertige" Systeme an.

7. Die Maßstäbe. Jede graphische Darstellung muß sich, wie gesagt, eines Maßstabes oder mehrerer Maßstäbe bedienen. Wir wollen die Maßstäbe als Größen einführen, mit denen sich rechnen läßt. Allgemein setzen wir fest, es sei die darzustellende physikalische Größe x gleich dem Produkt aus der Darstellungsgröße (Strecke) S_x und dem Maßstab m_x, also

$$x = S_x\, m_x . \tag{7.1}$$

Die Dimension von m_x ist demnach die der physikalischen Größe geteilt durch eine Länge. Ein Längenmaßstab erscheint daher beispielsweise in der Form

$$m_l = \frac{\ldots\,\mathrm{m}}{\mathrm{cm}} ,$$

ein Zeitmaßstab in der Form

$$m_t = \frac{\ldots\,\mathrm{sec}}{\mathrm{cm}} ,$$

ein Beschleunigungsmaßstab in der Form

$$m_b = \frac{\ldots\ \mathrm{m\ sec^{-2}}}{\mathrm{cm}}\,.$$

(Selbstverständlich könnte man ebenso gut auch die Kehrwerte $m'_x = 1/m_x$ als Maßstäbe einführen; dann gälte $S_x = x\, m'_x$.) Die Maßstäbe für die gegebenen Größen einer Aufgabe können alle willkürlich festgesetzt werden; die Freiheit in der Wahl wird nur durch die Zweckmäßigkeit eingeschränkt. Die Maßstäbe für die abgeleiteten Größen ergeben sich dagegen zwangläufig durch die Art der ausgeführten geometrischen Konstruktionen. Die für das Ein-Massen-System gültige Beziehung (5.2)

$$\omega^2 = \frac{C}{l\,\Theta}\,,$$

wo C die (konstante) Torsionssteifigkeit und l die Länge des Wellenstückes, Θ das Trägheitsmoment der Scheibe, ω die Kreisfrequenz bezeichnet, kann z. B., wie dies auch in einem der später (vgl. Abschnitt **21**) zu besprechenden Verfahren ausgeführt wird, mit Hilfe des Höhensatzes der ebenen Geometrie graphisch verwertet werden. Man schreibt sie zweckmäßig um in

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^2 = \frac{l\,\Theta}{C}\,. \tag{7.2}$$

Zur graphischen Verwertung setzt man

$$l = S_l\, m_l \qquad \text{und} \qquad \Theta = S_\Theta\, m_\Theta\,.$$

Die Maßstäbe m_l und m_Θ sind dabei frei wählbar. Konstruiert man die Strecke $S_{(1/\omega)}$, die ein Maß für den Kehrwert $(1/\omega)$ der Frequenz ω sein soll, mittels des Höhensatzes, so ist der Maßstab für diese Größe $m_{(1/\omega)}$ nicht mehr beliebig wählbar, sondern eindeutig festgelegt. Im Dreieck der Abb. 8 gilt nämlich der „Höhensatz"

$$\left(S_{\left(\frac{1}{\omega}\right)}\right)^2 = S_l\, S_\Theta\,. \tag{7.3}$$

Werden in (7.2) die physikalischen Größen gemäß (7.1) durch die Produkte aus Darstellungsgröße und Maßstab ersetzt, so kommt

$$\left(S_{\left(\frac{1}{\omega}\right)}\; m_{\left(\frac{1}{\omega}\right)}\right)^2 = \frac{S_l\, m_l\, S_\Theta\, m_\Theta}{C}\,;$$

wegen (7.3) bleibt übrig

$$m_{\left(\frac{1}{\omega}\right)} = \sqrt{\frac{m_l\, m_\Theta}{C}}\,. \tag{7.4}$$

Die Gleichung (7.4) zeigt, in welchem Maßstab die Strecke $S_{(1/\omega)}$ den Kehrwert $1/\omega$ der Frequenz angibt.

In entsprechender Weise gewinnt man die Maßstäbe für die Ergebnisse anderer geometrischer Konstruktionen. Als weitere Beispiele seien noch die Maßstäbe für das Ergebnis einer graphischen Differentiation oder Integration erwähnt.

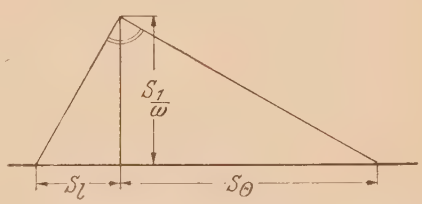


Abb. 8. Zum Höhensatz.

Liegt eine Kurve vor, die die Beziehung $y(x)$ darstellt, so müssen zur Aufzeichnung zwei Maßstäbe, m_x und m_y, vermöge der Beziehungen

$$x = S_x\, m_x \qquad \text{und} \qquad y = S_y\, m_y$$

gewählt werden. Der Maßstab m_z, in welchem die mit einer Polweite H (cm) vorgenommene graphische Differentiation die Kurve $z = dy/dx$ der Ableitung darstellt, lautet

$$m_z = \frac{m_y}{m_x}\,\frac{1}{H}\,. \tag{7.5a}$$

Umgekehrt gehört zu einer Integralkurve $z = \int y\, dx$ der Maßstab

$$m_z = m_x\, m_y\, H\,. \tag{7.5b}$$

Die Beziehung (7.5a) folgt aus $z = \dfrac{dy}{dx}$ durch Einführung von S und m,

$$S_z\, m_z = \frac{S_y\, m_y}{S_x\, m_x}\,,$$

unter Beachtung der geometrischen Beziehung (vgl. Abb. 9)

$$\frac{S_y}{S_x} = \frac{S_z}{H}\,.$$

Die Beziehung (7.5b) folgt aus $z = \int y\,dx$ nach Einführung von S und m,

$$S_z\, m_z = S_y\, m_y\, S_x\, m_x\,,$$

unter Beachtung der geometrischen Beziehung (vgl. Abb. 10)

$$\frac{S_y}{H} = \frac{S_z}{S_x}\,.$$

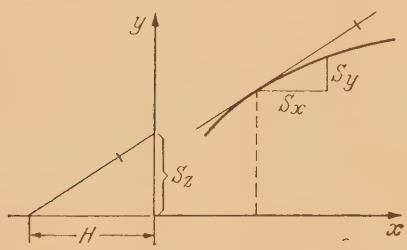


Abb. 9. Graphische Differentiation.

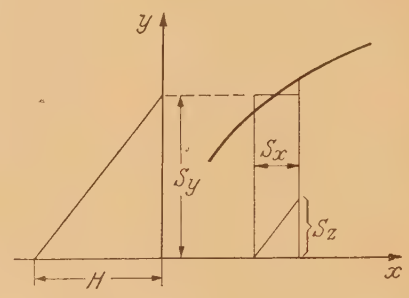


Abb. 10. Graphische Integration.

Benutzt man in dieser Weise die Maßstäbe als Quotienten, mit denen sich rechnen läßt, so kann man in jedem Fall den Maßstab der gesuchten Größe aus den Maßstäben der gegebenen Größen herleiten. Es schwinden so alle Zweifel über den Maßstab, in dem das Resultat als Ergebnis einer geometrischen Konstruktion erscheint.

8. Das allgemeine „Seileck". Auf irgendeinem Gebilde von eindimensionaler Erstreckung (Seil, Balken, Welle) mögen eine Reihe von ausgezeichneten Stellen liegen, (0), (1), (2), (3) in Abb. 11a. Diese Stellen teilen auf dem Gebilde „Felder" von der Länge l_1, l_2,... ab. Für die Stellen mit den Abszissen x_1, x_2, x_3, im ersten, zweiten, dritten ... „Feld" sollen die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_0\, x_1\,, \\ y_2 &= A_0\, x_2 + A_1\,(x_2 - l_1), \\ y_3 &= A_0\, x_3 + A_1\,(x_3 - l_1) + A_2\,(x_3 - l_2)\,, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

hergestellt werden. Solche Ausdrücke spielen in verschiedenen Zweigen der Mechanik eine Rolle. Wir werden ihnen im folgenden mehrfach begegnen.

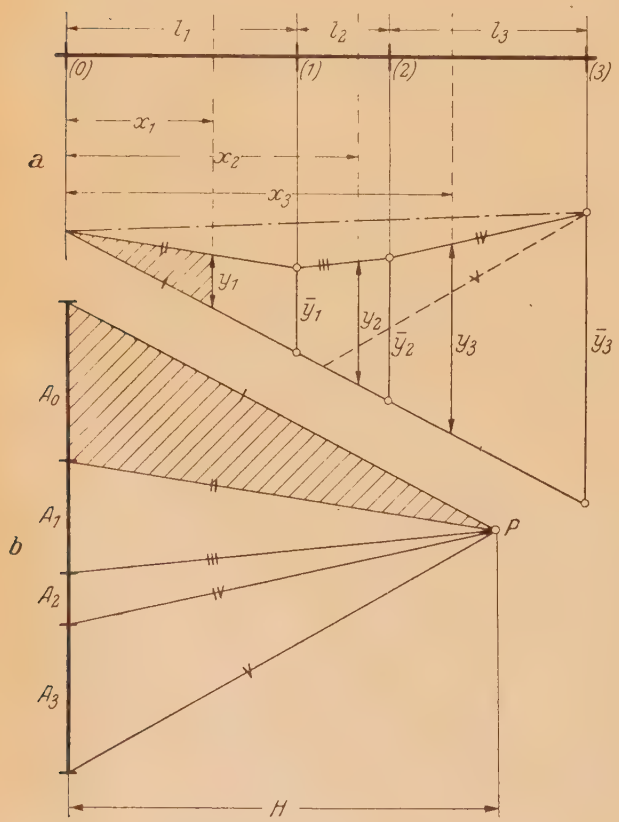


Abb. 11. Herstellung der Ausdrücke (8.1) mittels des Seilecks.

Die Ausdrücke (8.1) lassen sich in einfacher Weise graphisch herstellen, wie Abb. 11 anzeigt: Nach Wahl eines Maßstabes m_A für die Größen A_i werden die diese Größen darstellenden Strecken S_{A_i} hintereinander abgetragen, wie Abb. 11b zeigt. Die Begrenzungspunkte der Strecken werden mit dem im Abstand H (cm) gewählten Pol P verbunden. Danach werden Parallelen zu diesen Strahlen gezogen, so wie Abb. 11a anzeigt, wo zuvor die Feldlängen l_i nach Wahl eines Maßstabes m_l als Strecken S_{l_i} aufgezeichnet worden sind.

Es zeigt sich nun, daß die Ordinaten y_i nach Abb. 11a die gesuchten Ausdrücke (8.1) darstellen. Die Maßstäbe, in denen die Strecken S_y die Größen y_i darstellen, können wir leicht auffinden. Zunächst gilt

$$A = S_A\, m_A\,, \quad l = S_l\, m_l \quad \text{und} \quad y = S_y\, m_y\,.$$

Aus den Abb. 11a und 11b folgt zunächst für das erste Feld (schraffiert)

$$S_{y_1} : S_{x_1} = S_{A_0} : H$$

und daher

$$\frac{y_1}{m_y} = \frac{x_1}{m_x} \frac{A_0}{m_A} \frac{1}{H} .$$

Wenn nun $y_1 = A_0 x_1$ sein soll, wie die erste Gleichung von (8.1) fordert, so muß gelten

$$m_y = m_x m_A H . \tag{8.2}$$

Man sieht leicht ein, daß dieselbe Beziehung auch für die übrigen Felder bestehen bleibt, und daß die Ordinaten y jener Felder ein Maß für die jeweiligen Ausdrücke (8.1) darstellen.

In dieser Darstellungsweise bleibt ganz offen, welcher Art die physikalischen Größen sind, die hier mit A bezeichnet wurden, ob es sich um Kräfte, um Momente, um Massen, um Trägheitsmomente oder was sonst immer handelt. Man hat auch gar nicht nötig, die Polweite H als „Seilzug" oder „Torsionssteifigkeit" oder was sonst noch zu bezeichnen oder zu deuten. Man kann sie als eine einfache Strecke behandeln; als solche geht sie auch in die Maßstabbeziehung (8.2) ein.

Die Verwirrung, die in vielen Darstellungen herrscht, rührt daher, daß die Autoren nicht vergessen können, daß sie die Beziehungen (8.1) in der Mechanik zuerst als Ausdrücke für die Biegemomente eines Balkens kennen lernten, der an den Stellen (0), (1), (2) usw. durch Kräfte belastet ist. Wollen sie dann die Beziehung (8.1) in anderer Weise verwenden, so wie dies in den nachfolgenden Verfahren in mannigfacher Weise geschieht, dann mischen sie die neue Bedeutung, etwa der Größen A, mit der Erinnerungsdeutung aus der ersten Kenntnisnahme.

Schon der Name „Seileck" ist mit einer solchen Erinnerung behaftet. Er weist nämlich darauf hin, daß die (durch die strichpunktierte Linie geschlossene) Figur der Abb. 11a gedeutet werden kann als die Durchsenkung eines bei (0) und (3) befestigten, bei (1) und (2) mit Kräften A_1 und A_2 belasteten Seiles, dessen „Horizontalzug" (im gleichen Maßstab wie die Kräfte A) durch eine Strecke H dargestellt wird.

Für unsere späteren Zwecke werden wir von allen solchen Deutungen ganz absehen. Wir benötigen keine anderen Tatsachen als die, daß die Ordinaten y_i ein Maß sind für Ausdrücke von der Bauart (8.1).

Die Ausdrücke (8.1) können wir nun noch etwas umformen; sie gewinnen dann eine Gestalt, die uns ebenfalls häufig begegnen wird. Diese neue Gestalt bedeutet eine neue Anwendungsmöglichkeit der besprochenen Konstruktion des „Seileckes".

Bezeichnen wir mit $\bar{y}_\lambda$ den Wert, den die Ordinaten y_λ jeweils am Ende des λ-ten Feldes annehmen, also

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= y_1 (l_1) = A_0 l_1 , \\
\bar{y}_2 &= y_2 (l_1 + l_2) = A_0 (l_1 + l_2) + A_1 l_2 , \\
\bar{y}_3 &= y_3 (l_1 + l_2 + l_3) = A_0 (l_1 + l_2 + l_3) + A_1 (l_2 + l_3) + A_2 l_3 , \\
&\vdots
\end{aligned}$$

allgemein

$$\bar{y}_\lambda = y_\lambda \left(\sum_1^\lambda l_\nu \right) = A_0 \sum_1^\lambda l_\nu + A_1 \sum_2^\lambda l_\nu + \ldots + A_{\lambda-1} l_\lambda ,$$

so kommt für die Differenzen

$$\begin{aligned}
\bar{y}_2 - \bar{y}_1 &= (A_0 + A_1) l_2 , \\
\bar{y}_3 - \bar{y}_2 &= (A_0 + A_1 + A_2) l_3 , \\
&\vdots
\end{aligned}$$

allgemein

$$\bar{y}_\lambda - \bar{y}_{\lambda-1} = \left(\sum_0^{\lambda-1} A_\nu \right) l_\lambda$$

oder

$$\frac{\bar{y}_\lambda - \bar{y}_{\lambda-1}}{l_\lambda} = \sum^{\lambda-1} A_\nu . \tag{8.3}$$

Um Ausdrücke der Bauart (8.3) herzustellen, wird uns das „Seileck" ebenfalls dienlich sein.

9. „Gleichwertige" Gebilde. Ehe wir nun zur Besprechung der verschiedenen Lösungsverfahren selbst kommen, wollen wir noch eine weitere Betrachtung allgemeiner Art anstellen. Hat man die Eigenfrequenzen für ein bestimmtes mechanisches System besonderer Bauart gefunden, so kennt man damit die Eigenfrequenzen einer Reihe weiterer Gebilde, nämlich aller jener, die denselben Satz von Eigenfrequenzen aufweisen. Gebilde, deren Eigenfrequenzen übereinstimmen, wollen wir hier als „gleichwertig" bezeichnen. Solche gleichwertige Gebilde sind zunächst alle jene, deren Bewegungsgleichungen übereinstimmend gebaut sind, und deren Koeffizienten sich (da die Gleichungen homogen sind) nur um einen gemeinsamen Faktor unterscheiden.

Gebilde, die in diesem Sinne gleichwertig sind, zeigen z. B. die Abb. 12a und 12b, wenn für die Trägheitsmomente der Scheiben und die Massen die Proportion

$$\bar{\Theta}_0 : \bar{\Theta}_1 : \bar{\Theta}_2 = m_0 : m_1 : m_2$$

und für die Drehfederzahlen $\bar{c}$ und die Dehnfederzahlen c

$$\bar{c}_1 : \bar{c}_2 = c_1 : c_2$$

und überdies

$$\bar{c}_1 / \bar{\Theta}_0 = c_1 / m_0$$

gilt.

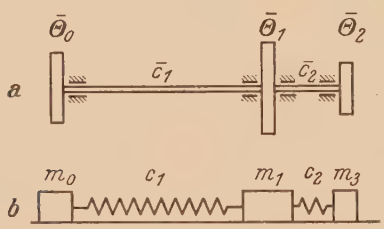


Abb. 12. Gleichwertige Gebilde (mit freien Enden).

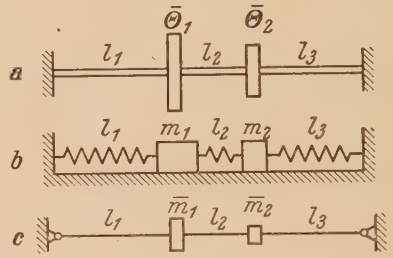


Abb. 13. Gleichwertige Gebilde (mit festen Enden).

Weitere gleichwertige Gebilde zeigen die Abb. 13a bis c, wenn gilt $\Theta_1 : \Theta_2 = m_1 : m_2 = \bar{m}_1 : \bar{m}_2$, die Längen l_1, l_2, l_3 jeweils gleich sind, und ferner die „Steifigkeiten", nämlich die „Torsionssteifigkeit" $G\,J_p$, die „Dehnsteifigkeit" $E\,J$ und die Seilzugkraft S so beschaffen sind, daß

$$\Theta_1 : G\,J_p = m_1 : E\,J = \bar{m}_1 : S$$

wird.

Wegen dieser Gleichwertigkeit ist es erlaubt, etwa statt eines Torsionsschwingers nach Abb. 13a ein belastetes Seil nach Abb. 13c zu untersuchen.

Eine andere Art von Gleichwertigkeit zeigen die Gebilde, bei denen jeweils Federn (Federnachgiebigkeiten) durch Massen und umgekehrt Massen durch Federnachgiebigkeiten ersetzt werden. Das Gebilde nach Abb. 12a ist gleichwertig dem Gebilde nach Abb. 13a, wenn bei gleichen Torsionssteifigkeiten $G\,J_p = (\bar{G}\,\bar{J}_p)$ gilt

$$l_1 : l_2 : l_3 = \bar{\Theta}_0 : \bar{\Theta}_1 : \bar{\Theta}_2$$

und

$$\Theta_1 : \Theta_2 = \bar{l}_1 : \bar{l}_2 ,$$

und wenn ferner

$$l_1 : \bar{\Theta}_0 = \Theta_1 : \bar{l}_1$$

ist. Gebilde, die sich entsprechen wie Abb. 12a und 13a, nennt man auch reziproke Gebilde.

Den Nachweis der Gleichheit der Eigenfrequenzen führt man über den Nachweis der Übereinstimmung der Bewegungsgleichungen. Wir verzichten hier darauf, diese Übereinstimmung explizit aufzuzeigen.

B. Die Verfahren, die sich unmittelbar an die Bewegungsgleichungen anschließen.

10. Das Verfahren nach *E. Gümbel* [1] und *M. Tolle* [5] mit Ergänzungen von *J. Geiger* [2], *E. Waimann* [22] und *W. Biber* [20] sowie das Verfahren von *E. v. Brauchitsch* [11]. a) Das rechnerische Vorgehen (nach *M. Tolle*). Die Vorschläge von *E. Gümbel* und *M. Tolle* sind eng miteinander verwandt. Ihnen ist gemeinsam, daß man nach Schätzung eines Wertes für das

Frequenzquadrat z von dem bekannten Wert $x_0=0$ und einem beliebigen Anfangswert u_0 (etwa $u_0=1$) ausgehend durch abwechselnde Benutzung der Gleichungen (4.6) sich jenen Wert x_{n+1} des Drillungsmomentes ermittelt, das als Erregermoment im rechts an Θ_n anschließenden Wellenstück vorhanden sein müßte, um eine Schwingung mit dem angenommenen Werte u_0 und der vorgegebenen Frequenz aufrecht zu erhalten. Im allgemeinen wird der Wert des Drillungsmomentes, zu dem man auf die angegebene Weise gelangt, von Null verschieden sein. Eine Eigenschwingung ist aber gerade dadurch gekennzeichnet, daß sie ohne ein solches erregendes Moment vor sich gehen kann. Unter allen Werten z gehören also jene zu Eigenschwingungen, d. h. bezeichnen Eigenfrequenzen, die x_{n+1} zu Null machen.

Nach *Tolle* geht man nun so vor, daß man für eine Reihe angenommener Werte z eine Rechnung in der beschriebenen Weise durchführt, d. h. unter abwechselnder Benutzung der Gleichungen (4.6) der Reihe nach sich die Ausschläge und Drillungsmomente

$$(u_0),\ x_1,\ u_1,\ x_2,\ u_2 \ldots\ u_n,\ x_{n+1}$$

errechnet, schließlich die „Restmomente" x_{n+1} in Abhängigkeit von z aufträgt und die Nullstellen dieser Funktion bestimmt. Diese Nullstellen bezeichnen jene Werte z, die zu Eigenfrequenzen des Schwingers gehören. Ein weiterer Vorschlag von *Tolle* geht dahin, statt der Funktion $x_{n+1}(z)$ die andere, $x_{n+1}(z)/z$, aufzutragen, weil sie eine geringere Schwankung zeigt.

Es sei noch erwähnt, daß *Tolle* überdies ein bestimmtes Schema zur Durchführung der Rechnungen vorschlägt. Wir sehen von der Wiedergabe dieses speziellen Schemas ab.

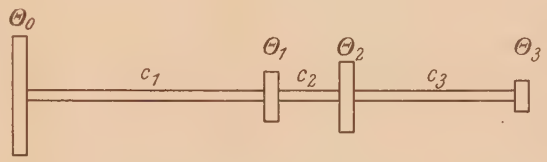


Abb. 14. Beispiel.

Beispiel. In Abb. 14 ist ein Schwinger aufgezeichnet, den wir noch des öfteren als Beispiel heranziehen werden. Seine Daten sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \Theta_0=0{,}36\ \mathrm{cm\,kg\,sec^2}, & l_1=100\ \mathrm{cm}, \\ \Theta_1=0{,}15\ \mathrm{cm\,kg\,sec^2}, & l_2=30\ \mathrm{cm}, \\ \Theta_2=0{,}21\ \mathrm{cm\,kg\,sec^2}, & l_3=70\ \mathrm{cm}, \\ \Theta_3=0{,}09\ \mathrm{cm\,kg\,sec^2}, & \end{array}\right\}\ G\,J_p=10^6\ \mathrm{kg\,cm^2}.$$

Die Rechnung nach *Tolle* liefert z.B. für die drei Frequenzquadrate $z=3\cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}$, $z=25\cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}$, $z=40\cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}$ die Wertereihen der Tabelle 1.

Tabelle 1. *Ermittlung der Restmomente.*

	$z=3\cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}$		$z=25\cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}$		$z=40\cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}$		Einheit
x_0	0		0		0		kg cm
u_0		1		1		1	1
x_1	$1{,}08\cdot10^4$		$9{,}0\cdot10^4$		$14{,}4\cdot10^4$		kg cm
u_1		$-0{,}08$		$-8{,}0$		$-13{,}4$	1
x_2	$1{,}044\cdot10^4$		$-21{,}0\cdot10^4$		$-66{,}0\cdot10^4$		km cm
u_2		$-0{,}393$		$-1{,}7$		6,38	1
x_3	$0{,}796\cdot10^4$		$-29{,}92\cdot10^4$		$-12{,}4\cdot10^4$		kg cm
u_3		$-0{,}950$		19,25		15,07	1
x_4	$0{,}539\cdot10^4$		$13{,}38\cdot10^4$		$41{,}9\cdot10^4$		kg cm

Die Werte der Funktion $x_4(z)/z$, die auf die beschriebene Weise (für viele weitere Argumente) zustande gekommen sind, zeigt Abb. 15. Als Nullstellen liest man daraus ab:

$$\begin{aligned} z_I &= 4{,}17\cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}, \\ z_{II} &= 19{,}5\ \cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}, \\ z_{III} &= 46{,}6\ \cdot10^4\ \mathrm{sec^{-2}}. \end{aligned}$$

Zu ihnen gehören als Eigenwerte der Schwingungen ersten, zweiten und dritten Grades die Kreisfrequenzen und Frequenzen

$$\begin{aligned} \omega_I &= 204{,}1\ \mathrm{sec^{-1}} \text{ und } f_I = 32{,}5\ \mathrm{Hz}, \\ \omega_{II} &= 441{,}0\ \mathrm{sec^{-1}} \text{ und } f_{II} = 70{,}2\ \mathrm{Hz}, \\ \omega_{III} &= 682{,}6\ \mathrm{sec^{-1}} \text{ und } f_{III} = 108{,}7\ \mathrm{Hz}. \end{aligned}$$

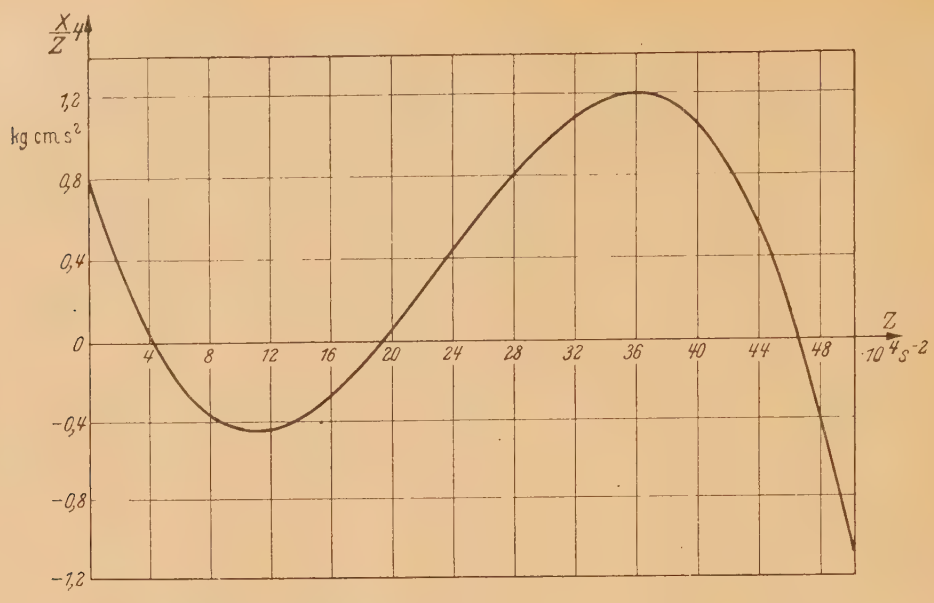


Abb. 15. Restmomentkurven des Schwingers nach Abb. 14.

Die Ausschlagbilder, die zu den drei Eigenschwingformen gehören, und die von der Rechnung mitgeliefert werden, zeigt Abb. 16.

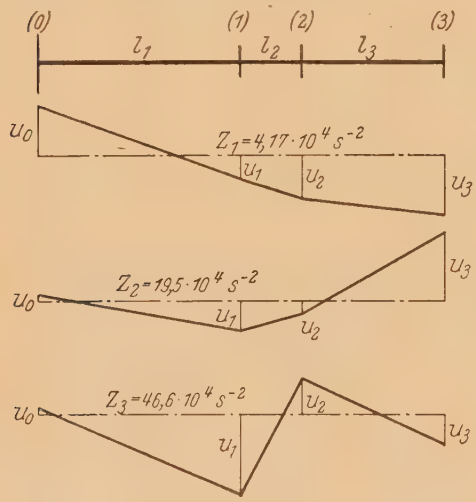


Abb. 16. Ausschlagbilder des Schwingers nach Abb. 14.

b) Zeichnerische Hilfsmittel (*E. Gümbel*). Wie wir schon erwähnten, sind die Gedankengänge *Gümbels* etwa dieselben wie die *Tolles*. Das Vorgehen nach *Gümbel* unterscheidet sich von dem nach *Tolle* eigentlich nur dadurch, daß *Gümbel* einen Teil der Rechnung durch die Zeichnung ersetzt. Das geschieht in folgender Weise: Aus der ersten Gleichung (4.6) erhält man durch Addition sofort die Beziehung

$$x_{\lambda+1} = z \sum_{\nu=0}^{\lambda} \Theta_\nu\, u_\nu\,, \tag{10.1a}$$

wofür sich, wenn man mit

$$T_\lambda = z\, \Theta_\lambda\, u_\lambda \tag{10.1b}$$

abkürzend das Moment der Trägheitskräfte bezeichnet, schreiben läßt

$$x_{\lambda+1} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} T_\nu\,. \tag{10.1c}$$

Die zweite Gleichung aus (4.6) nimmt dann wegen $c_\lambda = \frac{G J_p}{l_\lambda}$ die Gestalt

$$\frac{u_\lambda - u_{\lambda-1}}{l_\lambda} = \frac{\sum_0^{\lambda-1} T_\nu}{G J_p} \tag{10.2}$$

an. Das ist aber ein Ausdruck der Bauart (8.3), von dem wir wissen, daß und wie er mit Hilfe des Seilecks hergestellt werden kann.

Würde man die Größen T_ν von vornherein alle kennen, so könnte man sie in Art der Abb. 11b auftragen, und erhielte durch die Ordinaten $\bar{y}$ (am jeweiligen Feldende) die Ausschläge u geliefert. Nun kennt man die Größen T_ν zwar nicht von vornherein allesamt; man kennt aber zunächst T_0, denn es ist $T_0 = z\, \Theta_0\, u_0$. Legt man also einen Plan nach Abb. 17b an, wo man zweckmäßig den Pol P in die Höhe des Anfangspunktes (A) von T_0, und zwar auf der linken Seite wählt, so schneidet die Parallele zum Strahl $P\,(B)$ in Abb. 17a am Ende des Feldes l_1 den

Ausschlag u_1 ab. Unter Benutzung dieses Wertes rechnet man sich $T_1 = z\,\Theta_1\,u_1$ aus, trägt diesen Wert in Abb. 17b hinter T_0 ab, verbindet P mit (C) und zieht nun eine Parallele zu $P\,(C)$ durch das zweite Feld in Abb. 17a; diese schneidet am Ende des Feldes den Ausschlag u_2 ab. So fährt man fort. Zum Schluß muß wegen

$$x_{\lambda+1} = \sum_0^{\lambda} T_\nu = 0$$

der Endpunkt von T_λ wieder auf den Punkt (A) fallen, wenn eine Eigenschwingung vorliegen soll. Tut er das nicht, so hat man in der Differenzstrecke $(E)\,(A)$ ein Maß für das Drillungsmoment $x_{\lambda+1}$, also wieder einen Punkt $x_{\lambda+1}(z)$ gefunden, wie Abb. 17 zeigt. Man erhält durch dieses halb rechnerische, halb graphische Vorgehen, wenn z dem Quadrat einer Eigenfrequenz gleich ist, die Ausschlaglinie selbsttätig geliefert. (Man muß dabei beachten, daß in Abb. 17a die Ausschläge u_2 und u_3 negativ sind, so daß auch T_2 und T_3 negativ werden.)

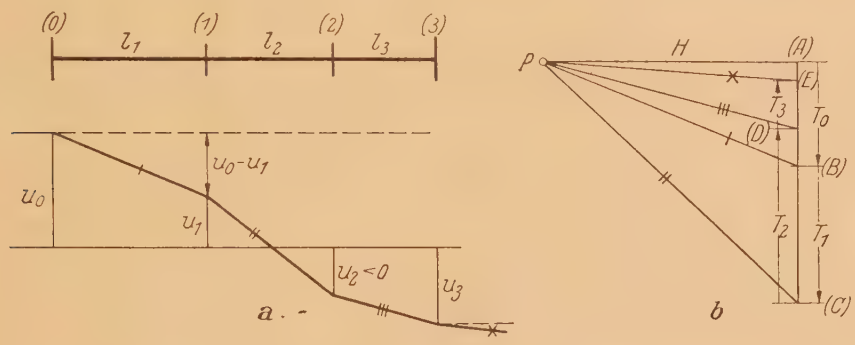


Abb. 17. Graphische Herstellung der Ausschlaglinie.

Hier fehlt nur noch ein Wort über die Maßstäbe, in denen die verschiedenen Größen erscheinen. Die Maßstäbe m_l für die Längen in 17a und m_T für die Momente der Trägheitskräfte (die die Dimension eines Drillungsmomentes haben) in 17b können frei gewählt werden. Der Maßstab für die Ordinate u liegt dann fest. Wegen (10.2) gilt (mit Benutzung von (7.1)

$$\frac{S_u\,m_u}{S_l\,m_l} = \frac{S_T\,m_T}{G\,J_p}\,;$$

aus der Geometrie der Konstruktion folgt

$$\frac{S_u}{S_l} = \frac{S_T}{H}\,.$$

daher bleibt

$$m_u = \frac{H}{G\,J_p}\,m_T\,m_l\,. \tag{10.3}$$

Das beschriebene Verfahren ist hier nach *Gümbel* und *Tolle* benannt. *Gümbels* Veröffentlichung aus dem Jahre 1912 enthält alle wesentlichen Teile des Gedankenganges, die *Tolle*sche Darstellung aus dem Jahre 1921 zeigt die klarste Einsicht. Es sei jedoch erwähnt, daß auch *Gümbel* schon Vorläufer hatte, insbesondere in *H. Holzer*[1], der im Jahre 1907 schon ähnliche Vorschläge machte. In seinem zusammenfassenden Buche [9] aus dem Jahre 1921 beschreibt *Holzer* das Vorgehen zudem ebenfalls und auf Grund der gleichen Gedankengänge wie wir hier. Man findet deshalb das Verfahren gelegentlich auch nach *Holzer* benannt.

c) Die Ergänzungen von *J. Geiger*, *K. Waimann* und *F. Söchting*. Das zeichnerische Vorgehen nach *Gümbel* liefert zu jedem angenommenen Wert z das zugehörige Ausschlagbild. Die Neigung des letzten „Seilstrahls" (in Abb. 17 mit × versehen) ist dabei ein Maß für das „Restmoment". Gehört z zu einer Eigenfrequenz, so ist das Restmoment Null, und der letzte Seilstrahl verläuft horizontal. Der Beitrag, den *J. Geiger* zu dem Verfahren lieferte, besteht nun in der Bemerkung, daß, weil die Gleichungen (4.6) in z linear sind, die Ausschlaglinien eines jeden Wellenstücks, die zu verschiedenen Werten z gehören, sich jeweils in einem Punkte schneiden. Es genügt also, die Ausschlaglinien für zwei verschiedene Werte von z zu zeichnen (am besten natürlich für zwei Werte, von denen der eine unter, der andere über dem

[1] *H. Holzer*, Schiffbau 8 (1907) S. 823, 866, 904.

zur Eigenfrequenz gehörigen Wert liegt). Bringt man die letzten Seilstrahlen zum Schnitt und zieht durch den Schnittpunkt eine Horizontale, so schneidet diese den Wert des letzten Ausschlags u_λ ab. Von da aus kann man rückwärts die ganze Ausschlaglinie zeichnen (vgl. Abb. 18, die schematisch die Ausschlaglinien eines Drei-Massen-Systems zeigt). Aus den so gewonnenen Werten der Ausschläge kann dann die Eigenfrequenz, etwa aus (4.4), leicht berechnet werden.

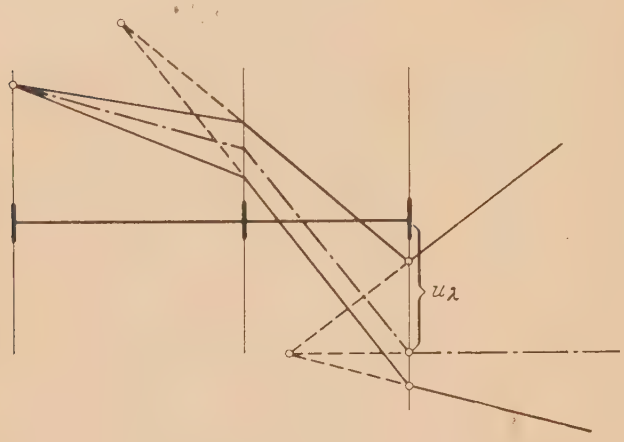


Abb. 18. Konstruktion der zu einer Eigenfrequenz gehörigen Ausschlaglinie aus benachbarten Ausschlaglinien nach *Geiger*.

Von den beiden Schritten, die das Gleichungspaar (4.6) fordert, werden nach *Tolle* beide rechnerisch ausgeführt; nach *Gümbel* wird der von der zweiten Gleichung bezeichnete Schritt auf der Zeichnung erledigt. Ein Vorschlag von *K. Waimann* geht nun dahin, auch den andereu Schritt graphisch zu tun. Statt die Größen $T_i = z\Theta_i u_i$ gemäß (10.1b) aus den der Zeichnung entnommenen Ausschlägen u_i zu errechnen, kann man die Größen T_i gemäß Abb. 19 konstruieren. Teil a) dieser Abbildung zeigt, wie sich die Momente der Trägheitskräfte T_i verhalten, wenn die Drehmassen gleich sind, Teil b) zeigt den allgemeinen Fall verschiedener Drehmassen, in Teil c) sind die T_i und u_i so aufgetragen, wie es dem Beispiel der Abb. 17 entspricht.

Nur am Rande und ohne Anführung von Einzelheiten sei noch ein weiterer Vorschlag *Waimanns* erwähnt: Man ermittle die Restmomente rein graphisch unter Benutzung verschiedener Polweiten H, trage die für die Restmomente erhaltenen Strecken über den verschiedenen Polweiten H auf und bestimme die Eigenfrequenz aus jener Polweite, die zum Restmoment Null führt.

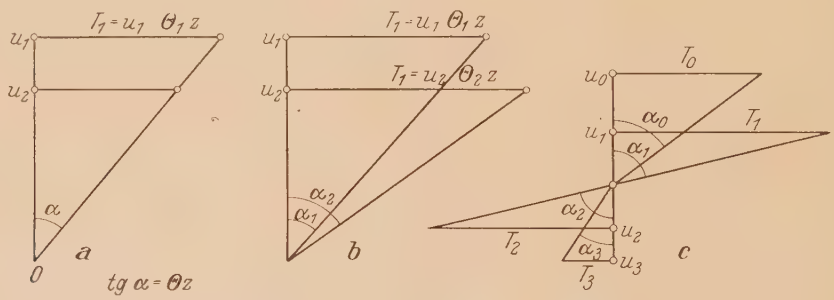


Abb. 19. Konstruktion der Trägheitskräfte nach *Waimann*.

Ein Vorschlag von *F. Söchting* [23] geht ferner noch dahin, zunächst etwa nach *Tolle* oder *Gümbel* mit einem angenommenen Wert von z die Ausschläge u_ν zu bestimmen, die Aufzeichnung der Restmomentkurve aber dadurch zu umgehen, daß man (nach *Rayleigh*) aus den „angenäherten" Werten u_ν mit Hilfe des Ausdrucks

$$\bar{z} = \frac{\Sigma\, c_\nu (u_\nu - u_{\nu-1})^2}{\Sigma\, \Theta_\nu\, u_\nu^2}$$

einen neuen Wert $\bar{z}$ ausrechnet; er liegt dem wahren näher. Mit diesem Wert $\bar{z}$ werden dann neue Ausschläge $\bar{u}_\nu$ errechnet, aus ihnen ein weiterer Wert $\bar{\bar{z}}$ und so fort, bis keine Änderung der Frequenz mehr eintritt.

Über die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens wird in der Arbeit von *Söchting* nichts gesagt. Hinsichtlich der Grundfrequenz ist die Konvergenz anderweitig festgestellt; für die höheren Frequenzen scheint sie nicht in jedem Fall gesichert zu sein.

d) Die Anwendung auf homogene Maschinen (*W. Biber*). In die Gruppe der in diesem Abschnitt beschriebenen Verfahren gehört auch der Vorschlag von *W. Biber* [20]. Er beschäftigt

sich mit den Kurbelwellen der Vielzylindermaschinen, deren Ersatzsysteme wenigstens für den Kurbelwellenteil aus lauter gleichen Scheiben und Wellenstücken nach Abb. 20 aufgebaut sind. Nach einem Vorschlag von *R. Grammel*, der zuerst solche Gebilde ausführlich in Betracht zog (vgl. Abschnitt **12**), pflegt man sie als „homogen" zu bezeichnen.

*Biber*s Behandlung der homogenen Schwinger schließt an das *Gümbel-Tolle*sche Vorgehen an. *Biber* macht darauf aufmerksam, daß man die im Einzelfall durchzuführende Rechnung dadurch abkürzen kann, daß man sich von vornherein die Werte u_0, x_1, $u_1 \ldots$ für eine Reihe von Frequenzen sozusagen „auf Vorrat" ausrechnet. Alle möglichen homogenen Wellen sind ja ähnlich, ihre Daten unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor. *Biber* legt seiner Rechnung daher eine sogenannte „Einheitswelle" zugrunde, für die alle Trägheitsmomente $\Theta = 1$ kg cm sec² und alle reduzierten Längen $l = 1$ cm sind. Die Einheitswelle wird außerdem so gewählt, daß $J_p = 1$ cm⁴ und damit ihre Torsionssteifigkeit für Stahl $G\,J_p = 8{,}3 \cdot 10^5$ kg cm² wird.

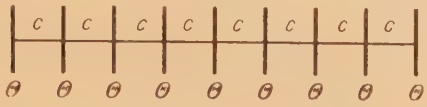


Abb. 20. „Homogener" Schwinger.

Für diese Einheitswelle gibt *Biber* in Tabellen die Werte von u_λ und x_λ für $\lambda = 1$ bis $\lambda = 15$ (d. h. für eine Maschine von 2 bis 16 Zylindern) an, und zwar zu Frequenzen z, wie sie minutlichen Drehzahlen $n = \omega \cdot 30/\pi$ von $n = 25$/min bis $n = 10\,000$/min entsprechen. (Die Stufen der Werte n in der Tabelle wechseln dabei; für Drehzahlen bis 1000/min beträgt die Stufe 50/min, danach 100/min.)

Versieht man die Größen der *Biber*schen Tabellen, die sich auf die „Einheitswelle" beziehen, jeweils mit einem Strich, so erhält man die (ungestrichenen) Werte der wirklichen Welle, die Scheiben vom Trägheitsmomente Θ und Wellenstücke der Länge l und das polare Trägheitsmoment J_p aufweist, nach den folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= \omega'^2 \frac{J_p}{\Theta l}, \\ x &= x' \frac{J_p}{l}, \\ T &= T' \frac{J_p}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Liegt nun ein Schwinger vor, der aus einem „homogenen" Teil mit daran anschließenden weiteren Stücken besteht, so liefern die *Biber*schen Tabellen nach Umrechnung gemäß (10.4) sofort den Ausschlag am „letzten Zylinder" und den Wert des Drillungsmomentes rechts vom „letzten Zylinder". Mit diesen Werten kann die Rechnung dann in der üblichen Weise fortgesetzt werden. Die Tabellen ersparen also die Durchführung der Rechnung „für den Kurbelwellenteil" des Schwingers. Verwendbar sind sie allerdings nur, wenn die Zusatzstücke sämtlich auf derselben Seite vom „homogenen" Teil liegen.

Ein Beispiel ist am Ende des Abschnitts **12**b auch nach dem *Biber*schen Verfahren durchgerechnet.

e) Methode mit Benutzung von Kettenbrüchen (nach *E. v. Brauchitsch* [11]). Mit dem *Gümbel-Tolle*schen Verfahren hat der Vorschlag nach *v. Brauchitsch* den Ausgangspunkt, die Gleichungen (4.6), gemeinsam. Aus diesen Gleichungen erhält man nach Elimination der Drillungsmomente x_i die Gleichungen (4.4) für die Ausschläge. *v. Brauchitsch* geht nun noch weiter und eliminiert auch noch die Ausschläge u_i aus diesen Gleichungen. Das Eliminationsverfahren ist dabei so gewählt, daß die übrigbleibende Relation in Form eines Kettenbruches erscheint. Diese Gleichung entspricht damit der Frequenzgleichung (4.5). Der Unterschied besteht nur darin, daß (4.5) als Ergebnis eines andersartig durchgeführten Eliminationsprozesses die Form einer Determinante annahm. Für die praktische Durchführung der Rechnung eignet sich die Kettenbruchform jedoch weit besser.

Wir zeigen die Gleichungen und damit das Vorgehen am Sonderfall eines Vier-Massen-Systems. Für vier Massen lauten die Gleichungen (4.4)

$$\left.\begin{aligned} (c_1 - \Theta_0 z)\, u_0 - c_1\, u_1 &= 0, \\ -c_1\, u_0 + (c_1 + c_2 - \Theta_1 z)\, u_1 - c_2\, u_2 &= 0, \\ -c_2\, u_1 + (c_2 + c_3 - \Theta_2 z)\, u_2 - c_3\, u_3 &= 0, \\ -c_3\, u_2 + (c_3 - \Theta_3 z)\, u_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$f_0(z) = c_1 - \Theta_0 z\,,$$
$$f_1(z) = c_1 + c_2 - \Theta_1 z\,,$$
$$f_2(z) = c_2 + c_3 - \Theta_2 z\,,$$
$$f_3(z) = c_3 - \Theta_3 z\,,$$

so findet man aus (10.5) rückwärts der Reihe nach

$$u_3 = u_2 \frac{c_3}{f_3}\,,$$

$$u_2 = u_1 \frac{c_2}{f_2 - \dfrac{c_3^2}{f_3}}\,,$$

$$u_1 = u_0 \frac{c_1}{f_1 - \dfrac{c_2^2}{f_2 - \dfrac{c_3^2}{f_3}}}\,,$$

und damit aus der ersten Gleichung

$$f_0 - \frac{c_1^2}{f_1 - \dfrac{c_2^2}{f_2 - \dfrac{c_3^2}{f_3}}} = 0\,. \tag{10.6}$$

Für die Rechnung nimmt man wieder Werte z an und errechnet die f_i und den Wert des Kettenbruchs. Die Eigenfrequenzen sind die Nullstellen des Kettenbruches.

Da die Ausschläge von vornherein eliminiert sind, liefert die Rechnung (im Gegensatz zu den Methoden unter *a*, *b* und *c*) nicht auch die Ausschlagbilder.

11. Die Drillungsfunktionen (Das Verfahren von *W. A. Tuplin* [21]). Nach dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren erhält man die Eigenfrequenzen des vorgelegten Schwingers von n Freiheitsgraden aus den Nullstellen einer Funktion $x_{n+1}(z)$, die man sich punktweise herstellt. Jeder einzelne Funktionswert entsteht dabei als Ergebnis einer Rechnung oder eines teils rechnerischen, teils zeichnerischen Verfahrens. Da man eine große Anzahl solcher Funktionswerte benötigt, erhebt sich die Frage, ob die Funktion $x_{n+1}(z)$ nicht explizit durch einen analytischen Ausdruck angegeben werden kann. Dann ließen sich auch die Wurzeln, falls nötig, genauer bestimmen als nach der doch primitiven Methode der Aufzeichnung der Funktion, die bisher befolgt wurde. Es ist nun in der Tat möglich, solche expliziten Ausdrücke zu finden. Und zwar gewinnt man sie dadurch, daß man aus den Gleichungen (4.6) die Ausschläge u entfernt, so daß nur die Drillungsmomente übrig bleiben. Aus der ersten Gleichung (4.6) folgt

$$u_\lambda = \frac{x_{\lambda+1} - x_\lambda}{z\,\Theta_\lambda}\,;$$

setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung (4.6) ein, so kommt

$$x_{\lambda+1}\frac{c_\lambda}{\Theta_\lambda} = x_\lambda\left(\frac{c_\lambda}{\Theta_{\lambda-1}} + \frac{c_\lambda}{\Theta_\lambda} - z\right) - x_{\lambda-1}\frac{c_\lambda}{\Theta_{\lambda-1}}\,. \tag{11.1a}$$

Die Faktoren $c_\lambda/\Theta_{\lambda-1}$ und c_λ/Θ_λ haben dabei eine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Wir haben sie in Abschnitt 2 schon erwähnt und dort auch schon die Abkürzungen (2.6) für sie eingeführt. Mit Benutzung dieser Abkürzungen wird aus (11.1a)

$$x_{\lambda+1}\,k'_\lambda = x_\lambda\,(k_\lambda + k'_\lambda - z) - x_{\lambda-1}\,k_\lambda\,. \tag{11.1b}$$

Diese Gleichung verbindet die Werte der Drillungsmomente in drei aufeinander folgenden Wellenstücken. Man kann sie als Rekursionsformel benutzen, um das Drillungsmoment x_{n+1} aufzusuchen. Dazu benötigt man zwei Werte am Anfang. Daß $x_0 = 0$ ist, wissen wir. Die Größe von x_1 bleibt bei Eigenschwingungen unbestimmt. x_1 würde daher als unbestimmter Faktor in allen Gleichungen auftreten. Wir dividieren deshalb (11.1b) zweckmäßigerweise von vornherein durch x_1 und erhalten so mit den Abkürzungen

$$\xi_\lambda = \frac{x_\lambda}{x_1}$$

die neue Rekursionsformel

$$\xi_{\lambda+1}\,k'_\lambda = \xi_\lambda\,(k_\lambda + k'_\lambda - z) - \xi_{\lambda-1}\,k_\lambda \tag{11.1c}$$

mit den Anfangswerten $\xi_0 = 0$ und $\xi_1 = 1$. Von den bekannten Werten ξ_0 und ξ_1 aus können

mit Hilfe von (11.1c) nun alle ξ_λ aufgebaut werden. Die dimensionslosen Größen ξ_λ, die wir als „relative Drillungsmomente" bezeichnen wollen, sind, wie aus (11.1c) hervorgeht, ganze rationale Funktionen in z vom Grade $\lambda-1$.

Für die praktische Rechnung ist (11.1c) aber immer noch nicht bequem genug. Störend ist noch die Division durch k'_λ, die man jedesmal vornehmen muß, um ξ_λ zu erhalten. Wir definieren deshalb neue Funktionen g_λ nach

$$g_\lambda = \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} k'_\nu\right) \xi_\lambda \quad (\lambda=2,3\ldots), \tag{11.2}$$

mit $g_0=0$, $g_1=1$, und nennen sie Drillungsfunktionen. Sie sind nicht mehr dimensionslos, weisen vielmehr die Dimensionen $T^{-2(\lambda-1)}$ auf. Die für sie gültige Rekursionsformel lautet

$$g_{\lambda+1}(z) = g_\lambda(z)\,(k_\lambda + k'_\lambda - z) - g_{\lambda-1}(z)\,k_\lambda\,k'_{\lambda-1}\,. \tag{11.3}$$

Auch die Funktionen $g_{\lambda+1}(z)$ sind ganze rationale Funktionen in z vom Grade λ. Sie können leicht hergestellt werden. Man bedarf nur der Kenntnis aller „Teilfrequenzen" k_λ und k'_λ der Welle; diese sind aber bekannt, sie folgen sogleich aus den c und Θ.

Wir verzichten darauf, die Funktion $g_{n+1}(z)$, die ein Maß für das letzte Drillungsmoment x_{n+1} abgibt, in allgemeinen Zeichen anzuschreiben. Sie wäre so unübersichtlich, daß sie für eine praktische Rechnung doch nicht in Betracht kommt. Man geht vielmehr auch bei der Rechnung jeweils schrittweise vor und baut sich die Funktionen g_λ der Reihe nach auf. Man beginnt mit

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= 1\,,\\ g_2 &= (k_1 + k'_1 - z)\,g_1 = (k_1 + k'_1 - z)\,,\\ g_3 &= (k_2 + k'_2 - z)\,g_2 - k_2\,k'_1\,g_1 = (k_2 + k'_2 - z)g_2 - k_2\,k'_1\,,\\ g_4 &= (k_3 + k'_3 - z)\,g_3 - k_3\,k'_2\,g_2 \end{aligned}\right\} \tag{11.3a}$$

und erhält schließlich $g_{n+1}(z)$ als ein Polynom n-ten Grades in z. Die Forderung, daß $x_{n+1}=0$ sein soll, bedeutet, daß auch ξ_{n+1} und damit g_{n+1} verschwinden müssen. Die n Wurzeln z_i der Gleichung

$$g_{n+1}(z) = 0 \tag{11.4}$$

liefern also die n Eigenfrequenzen des Problems.

Aus den Frequenzgleichungen $g_2=0$ und $g_3=0$ erhält man sofort die folgenden geläufigen Gleichungen für das Zwei- bzw. Drei-Massen-System:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Aus } g_2=0 \text{ kommt}\\ &\qquad z = k_1 + k'_1\,,\\ &\text{aus } g_3=0 \text{ kommt}\\ &\qquad z^2 - z\,(k_1 + k'_1 + k_2 + k'_2) + k_1 k_2 + k_1 k'_2 + k'_1 k'_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{11.4a}$$

Rechentechnisch ist es oft bequemer, statt mit den dimensionsbehafteten Größen k, k', z und g mit dimensionslosen Größen zu rechnen. Die Befreiung von der Dimension erzielt man dadurch, daß man mit Hilfe irgendeiner „Bezugsgröße" k^*, die an der Maschine gar nicht vorzukommen braucht, bildet

$$\gamma_\lambda = \frac{k_\lambda}{k^*}, \qquad \gamma'_\lambda = \frac{k'_\lambda}{k^*}, \qquad \zeta = \frac{z}{k^*} \tag{11.5}$$

und dazu die neue Funktion

$$\eta_{\lambda+1}(\zeta) = \frac{g_{\lambda+1}(z)}{k^{*\lambda}}\,,$$

die nun reduzierte Drillungsfunktion heißen soll. Ihre Rekursionsformel lautet schließlich

$$\eta_{\lambda+1}(\zeta) = \eta_\lambda(\zeta)\,(\gamma_\lambda + \gamma'_\lambda - \zeta) - \gamma_\lambda\,\gamma'_{\lambda-1}\,\eta_{\lambda-1}(\zeta); \tag{11.6}$$

ausführlich angeschrieben kommt

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= 1\,,\\ \eta_2 &= (\gamma_1 + \gamma'_1 - \zeta)\,,\\ \eta_3 &= (\gamma_2 + \gamma'_2 - \zeta)\,\eta_2 - \gamma_2\,\gamma'_1\,,\\ \eta_4 &= (\gamma_3 + \gamma'_3 - \zeta)\,\eta_3 - \gamma_3\,\gamma'_2\,\eta_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{11.3b}$$

Diese Gleichungen für die reduzierten Drillungsfunktionen ersetzen jetzt die Gleichungen (11.3a) für die Drillungsfunktionen selbst. Die reduzierte Drillungsfunktion $\eta_{\lambda+1}(\zeta)$ ist nun eine ganze rationale Funktion in ζ vom Grade λ. Sie ist, wie ζ selbst, dimensionslos. Auch sie baut man zweckmäßig schrittweise auf. Die n Wurzeln ζ_i der Gleichung

$$\eta_{n+1}(\zeta) = 0 \tag{11.4b}$$

geben dann die Quadrate der Eigenfrequenzen in der Form

$$\omega_i^2 = z_i = k^*\,\zeta_i\,. \tag{11.7}$$

Wir zeigen nun die Durchführung der Rechnung an einem Beispiel. Wir wählen dazu den in Abb. 14 dargestellten Schwinger, dessen Daten auf Seite 13 aufgeführt sind, und dessen drei Eigenfrequenzen in Abschnitt **10** nach dem *Gümbel-Tolle*schen Verfahren schon bestimmt worden sind. Mit den angegebenen Werten für die Drehfederzahlen c_λ und die Drehmassen Θ_λ findet man für die k_λ und k'_λ

$$k_1 = \frac{c_1}{\Theta_0} = \frac{25}{9} \cdot 10^4 \,\mathrm{sec}^{-2}, \quad k'_1 = \frac{c_1}{\Theta_1} = \frac{2}{3} \cdot 10^5 \,\mathrm{sec}^{-2},$$

$$k_2 = \frac{c_2}{\Theta_1} = \frac{2}{9} \cdot 10^6 \,\mathrm{sec}^{-2}, \quad k'_2 = \frac{c_2}{\Theta_2} = \frac{1}{63} \cdot 10^7 \,\mathrm{sec}^{-2},$$

$$k_3 = \frac{c_3}{\Theta_2} = \frac{10^7}{147} \,\mathrm{sec}^{-2}, \quad k'_3 = \frac{c_3}{\Theta_3} = \frac{1}{63} \cdot 10^7 \,\mathrm{sec}^{-2}.$$

Wählt man die Vergleichsgröße k^* zu

$$k^* = \frac{1}{63} \cdot 10^7 \,\mathrm{sec}^{-2},$$

so erhalten die γ_λ und γ'_λ die Werte

$$\gamma_1 = 0{,}175, \qquad \gamma'_1 = 0{,}42,$$
$$\gamma_2 = 1{,}4, \qquad \gamma'_2 = 1,$$
$$\gamma_3 = 0{,}42857, \qquad \gamma'_3 = 1.$$

Die reduzierten Drillungsfunktionen η_λ bauen sich gemäß den Gleichungen (11.3b) auf. Mit den angegebenen Werten findet man die Koeffizienten der Tabelle 2.

Tabelle 2. *Ermittlung der Funktion* $\eta_4(\zeta)$.

	ζ^0	ζ^1	ζ^2	ζ^3
η_1	1,0			
η_2	0,595	1,0		
$-\zeta\eta_2$		−0,595	1,0	
$(\gamma_2+\gamma_2')\eta_2 = 2{,}4 \cdot \eta_2$	1,428	−2,400		
$-\gamma_2\gamma_1'$	−0,588			
η_3	0,840	−2,995	1,0	
$-\zeta\eta_3$		−0,840	2,995	−1
$(\gamma_3+\gamma_3')\eta_3 = 1{,}42857\,\eta_3$	1,200	−4,2785	1,4286	
$-\gamma_3\gamma_2'\eta_2$	−0,255	0,4286		
η_4	0,945	−4,690	4,4236	−1

Die gesuchte reduzierte Drillungsfunktion $\eta_4(\zeta)$ lautet daher

$$\eta_4(\zeta) = -\zeta^3 + 4{,}4236\,\zeta^2 - 4{,}69\,\zeta + 0{,}945.$$

Die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\eta_4(\zeta) = 0$$

geben die Eigenfrequenzen an. Zur Bestimmung der tiefsten Wurzel wurde $\eta_4(\zeta)$ in der Nähe des Wertes $\zeta = 0{,}25$ aufgezeichnet (Abb. 21). Die berechneten Funktionswerte sind

ζ	0,25	0,26	0,27
η_4	0,0334	0,0071	0,01851

Aus der Abbildung findet man als Nullstelle der Funktion $\eta_4(\zeta)$ den Wert

$$\zeta_I = 0{,}2628.$$

Dazu gehören die Werte

$$\omega_I^2 = k^*\,\zeta_I = 4{,}17 \cdot 10^4 \,\mathrm{sec}^{-2},$$
$$\omega_I = 204{,}2 \,\mathrm{sec}^{-1}, \quad f_1 = 32{,}5 \,\mathrm{Hz}.$$

Die beiden übrigen Wurzeln wurden so bestimmt, daß $\eta_4(\zeta)$ durch $(\zeta - \zeta_I)$ dividiert wurde, was die quadratische Gleichung

$$\zeta^2 - 4{,}1636\,\zeta + 3{,}5950 = 0$$

liefert. Als Wurzeln dieser Gleichung erhält man (rechnerisch)

$$\zeta_{II} = 1{,}223, \qquad \zeta_{III} = 2{,}941;$$

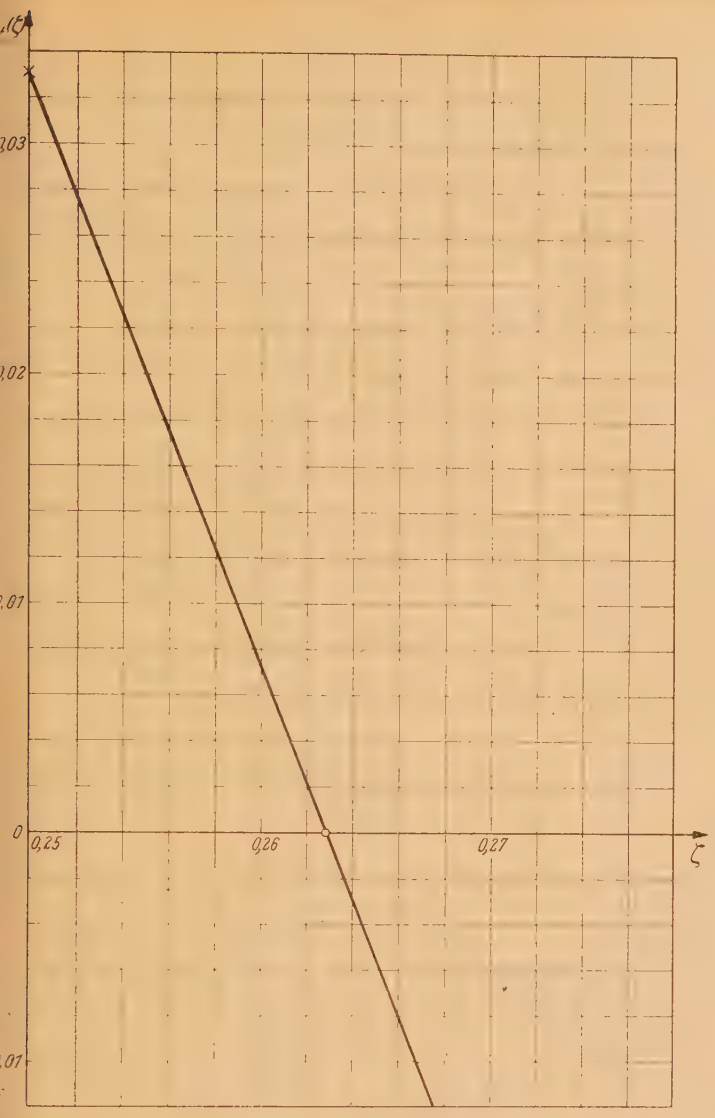


Abb. 21. Bestimmung der ersten Nullstelle der Funktion $\eta_4(\zeta)$.

dazu gehören die Werte

$$\omega_{II}^2 = 19{,}41 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-2} ,$$
$$\omega_{III}^2 = 46{,}7 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-2} ,$$
$$\omega_{II} = 440{,}6 \text{ sec}^{-1} ,$$
$$\omega_{III} = 683{,}4 \text{ sec}^{-1} ,$$
$$f_{II} = 70{,}2 \text{ Hz} ,$$
$$f_{III} = 108{,}8 \text{ Hz} .$$

Man sieht, daß die Übereinstimmung mit den Werten von Abschnitt **10** befriedigend ist.

12. Die Drillungsfunktion für homogene Maschinen und Maschinen mit homogenem Kern. (Das Verfahren von *R. Grammel* [18].) a) Die homogene Maschine. An den im vorigen Abschnitt hergeleiteten Rekursionsformeln (11.6) für die reduzierten Drillungsfunktionen $\eta_\lambda(\zeta)$ lassen sich erhebliche Vereinfachungen anbringen, wenn es sich um eine sogenannte „homogene" Maschine handelt, wenn das Ersatzsystem also der Abb. 20 entspricht, wo alle $\Theta_i = \Theta$ und alle $c_i = c$ jeweils einander gleich sind. Wählt man nämlich die im vorigen Abschnitt eingeführte Bezugsgröße k^* gleich c/Θ,

$$k^* = k = \frac{c}{\Theta} ,$$

so werden alle γ_λ und γ'_λ zu 1, und die Rekursionsformel (11.6) lautet

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{\lambda+1}(\zeta) = (2-\zeta)\,\eta_\lambda(\zeta) - \eta_{\lambda-1}(\zeta) \\ &\text{mit} \quad \eta_0 = 0 \quad \text{und} \quad \eta_1 = 1 . \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Jetzt lassen sich (unabhängig von den besonderen Abmessungen c und Θ des Schwingers) die Koeffizienten der Potenzen von ζ von vornherein angeben. Man kann sie entweder wie zuvor schrittweise aus (12.1) aufbauen oder durch eine allgemeine Formel beschreiben.

Neben den so hergestellten Drillungsfunktionen η_λ wollen wir weiterhin auch Funktionen φ_λ benutzen, die mit den η_λ in dem einfachen Zusammenhang

$$\varphi_\lambda(\zeta) = (-1)^\lambda \, \eta_{\lambda+1}(\zeta) \tag{12.2}$$

stehen. Die Funktionen $\varphi_\lambda(\zeta)$ sind von *R. Grammel* unter dem Namen „reduzierte Frequenzfunktionen" in die Literatur eingeführt worden. Für sie liegen ausführliche Tabellen und Formelsammlungen (für die weiterhin zu betrachtenden Fälle) vor. Um die Bezugnahme auf das große, in den Originalarbeiten bereitgestellte Material an Formeln und Zahlen zu erleichtern, dehnen wir die folgenden Erörterungen auch auf die Funktionen φ_λ aus.

Zunächst machen wir uns mit einigen Eigenschaften der Funktionen $\varphi_\lambda(\zeta)$ bekannt. Die $\varphi_\lambda(\zeta)$ sind ganze rationale Funktionen vom Grade λ in ζ. Für sie gilt die wegen (12.2) aus (12.1) hervorgehende Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_\lambda(\zeta) = (\zeta - 2)\,\varphi_{\lambda-1}(\zeta) - \varphi_{\lambda-2}(\zeta) \\ &\text{mit} \quad \varphi_{-1} = 0 , \quad \varphi_0 = 1 . \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Baut man die Funktionen z. B. schrittweise auf, so erhält man das folgende Schema (Tabelle 3) für die Koeffizienten der einzelnen Potenzen. Die absoluten Werte der Koeffizienten sind dieselben für die Funktionen $\eta_{\lambda+1}$ wie für φ_λ. In den $\eta_{\lambda+1}$ sind die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von ζ negativ, die der geraden positiv; in den φ_λ ist der Koeffizient der höchsten Potenz positiv, die übrigen Glieder haben wechselndes Zeichen.

Tabelle 3. *Koeffizienten der Potenzen von ζ in den Funktionen φ_λ oder $\eta_{\lambda+1}$.*

	ζ^0	ζ^1	ζ^2	ζ^3	ζ^4	ζ^5	ζ^6	ζ^7	ζ^8	ζ^9	ζ^{10}
$\lambda=0$	1										
$\lambda=1$	2	1									
$\lambda=2$	3	4	1								
$\lambda=3$	4	10	6	1							
$\lambda=4$	5	20	21	8	1						
$\lambda=5$	6	35	56	36	10	1					
$\lambda=6$	7	56	126	120	55	12	1				
$\lambda=7$	8	84	252	330	220	78	14	1			
$\lambda=8$	9	120	462	792	715	364	105	16	1		
$\lambda=9$	10	165	792	1716	2002	1365	560	136	18	1	
$\lambda=10$	11	220	1278	3432	5005	4368	2380	816	171	20	1

So ist z. B.

$$\eta_4(\zeta) = -\zeta^3 + 6\,\zeta^2 - 10\,\zeta + 4\,,$$

während

$$\varphi_3(\zeta) = \zeta^3 - 6\,\zeta^2 + 10\,\zeta - 4$$

lautet.

Die Koeffizienten lassen sich auch in geschlossener Form als Binomialkoeffizienten schreiben. Wir geben hier ohne Beweis an, daß

$$\varphi_\lambda(\zeta) = \zeta^\lambda - \binom{2\lambda}{1}\zeta^{\lambda-1} + \binom{2\lambda-1}{2}\zeta^{\lambda-2} - + \cdots + (-1)^\lambda(\lambda+1) \tag{12.4a}$$

ist, wofür man in Summenform schreiben kann

$$\varphi_\lambda(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \binom{2\lambda+1-\nu}{\nu} \zeta^{\lambda-\nu}. \tag{12.4b}$$

Es ist ferner bemerkenswert, daß alle Funktionen $\varphi_\lambda(\zeta)$ entweder symmetrisch oder schiefsymmetrisch zum Punkte $\zeta=2$ sind, symmetrisch für gerade λ, schiefsymmetrisch für ungerade λ. Daraus folgt, daß sich die Nullstellen paarweise in der Form

$$\zeta_i + \zeta_{\lambda-i} = 4 \tag{12.4c}$$

anordnen, und daß für die ungeraden λ stets eine Nullstelle

$$\zeta_{\frac{1}{2}(\lambda+1)} = 2 \tag{12.4d}$$

vorhanden ist.

Die Nullstellen ζ_i der Funktionen φ_1 bis φ_{12} sind in der folgenden Tabelle 4 angegeben.

Tabelle 4. *Nullstellen der Funktionen φ_λ.*

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
2,000	1,000	0,586	0,382	0,268	0,198	0,152	0,121	0,098	0,081	0,068	0,058
	3,000	2,000	1,382	1,000	0,753	0,586	0,468	0,382	0,317	0,268	0,232
		3,414	2,618	2,000	1,555	1,235	1,000	0,824	0,690	0,586	0,503
			3,618	3,000	2,445	2,000	1,653	1,382	1,159	1,000	0,865
				3,732	3,247	2,765	2,347	2,000	1,715	1,482	1,291
					3,802	3,414	3,000	2,618	2,285	2,000	1,761
						3,848	3,532	3,176	2,831	2,518	2,239
							3,879	3,618	3,310	3,000	2,709
								3,902	2,683	3,414	3,135
									3,919	3,732	3,497
										3,932	3,768
											3,941

Aus den Werten der Tabelle 4 erhält man gemäß (11.7)

$$\omega_i = \sqrt{z_i} = \sqrt{\frac{c}{\Theta}\,\zeta_i} \tag{12.5}$$

sogleich die Eigenfrequenzen einer homogenen Maschine.

Solange man nur rein homogene Maschinen betrachtet, benötigt man außer den Nullstellen keine weiteren Funktionswerte φ. Für die später anschließenden Betrachtungen werden sie jedoch erforderlich. Tafeln dieser Funktionen finden sich bei *R. Grammel*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 228 u ff. sowie in dem Lehrbuch *C. B. Biezeno-R. Grammel*, Techn. Dynamik. Berlin 1939, im Anhang V.

Im Abschnitt **13** werden wir schließlich noch angeben, wie die *Grammel*schen Frequenzfunktionen sich aus trigonometrischen Ausdrücken aufbauen lassen.

b) Homogene Maschinen mit einer Zusatzmasse. Beispiele für homogene Maschinen stellen z. B. die Brennkraftmaschinen mit in einer Reihe stehenden Zylindern dar, die sogenannten Reihenmotoren. In den seltensten Fällen ist ein solches homogenes Stück jedoch allein vorhanden; meist treten noch Zusatzdrehmassen, wie Schwungräder, Dynamomotoren, Kupplungen, Treibschrauben u. dgl. hinzu. Wir betrachten nun Schwinger, die aus einem homogenen „Kern" bestehen, an den sich „Zusatzstücke" anschließen. Als ersten Fall untersuchen wir die homogene Welle mit einer Zusatzdrehmasse, wie sie durch Abb. 22 angegeben wird. $\Theta_0 = \Theta_1 = \cdots = \Theta_n = \Theta$ seien die $(n+1)$ gleichen Drehmassen des homogenen Kerns (die

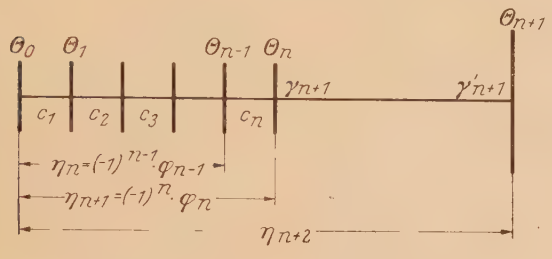


Abb. 22. Homogene Maschine mit einer Zusatzmasse.

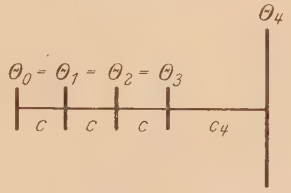


Abb. 23. Beispiel.

zu den Zylindern gehören), $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$ die unter sich gleichen Steifigkeiten der zwischen den Zylindern liegenden Wellenstücke. Θ_{n+1} sei das Trägheitsmoment der Zusatzdrehmasse, c_{n+1} die Steifigkeit des Anschlußstückes der Welle. Aus diesen Werten bilden wir mit $k^* = c/\Theta$ zuerst

$$\gamma_1 = \gamma'_1 = \gamma_2 = \gamma'_2 = \cdots = \gamma_n = \gamma'_n = 1\,,$$

sodann

$$\gamma_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{k^*} = \frac{c_{n+1}}{c}\,, \qquad \gamma'_{n+1} = \frac{k'_{n+1}}{k^*} = \frac{c_{n+1}}{c}\,\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\,. \tag{12.6}$$

Die Eigenfrequenzen erhält man (wie stets) aus den Nullstellen der reduzierten Drillungsfunktionen $\eta_{n+2}(\zeta)$. Für diese nimmt die Rekursionsformel (11. 6) die Gestalt an

$$\eta_{n+2}(\zeta) = \eta_{n+1}(\zeta)\,(\gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} - \zeta) - \eta_n(\zeta)\,\gamma_{n+1}\,. \tag{12.7}$$

Sowohl η_{n+1} wie η_n bedeuten nun aber Drillungsfunktionen homogener Stücke: η_{n+1} ist die Drillungsfunktion des homogenen Kerns von Θ_0 bis Θ_n, η_n die des weiterhin noch um die Drehmasse Θ_n verkürzten Stückes von Θ_0 bis Θ_{n-1} (wie die Abb. 22 andeutet). Führt man statt der Drillungsfunktionen η, soweit sie sich auf homogene Stücke beziehen, die Funktionen φ ein, so kommt wegen $\eta_{n+2} = 0$, unter Benutzung von (12.2) und Berücksichtigung von (12.6),

$$(\zeta - \gamma_{n+1} - \gamma'_{n+1})\,\varphi_n(\zeta) = \gamma_{n+1}\,\varphi_{n-1}(\zeta)\,. \tag{12.8}$$

Diese Gleichung erhält nun nur tabellierte Funktionen. Die Wurzeln ζ_i der Gleichung (12.8) findet man am zweckmäßigsten als Schnittpunkte zweier Kurven $y_1(\zeta)$ und $y_2(\zeta)$, von denen die eine die linke, die andere die rechte Seite der Gleichung darstellt. Man hat also die bekannte Funktion $\varphi_n(\zeta)$ mit einem in ζ linearen Faktor zu multiplizieren, die bekannte Funktion $\varphi_{n-1}(\zeta)$ mit einer Konstanten. Die Kurven schneiden sich so oft, als Wurzeln von $\eta_{n+2}(\zeta) = 0$ vorhanden sind, also $(n+1)$ mal. Aus den Wurzeln ζ_i folgen die Eigenfrequenzen nach (11.7).

Wir geben ein Beispiel. Zu ermitteln sind die Eigenfrequenzen der Drillungsschwingungen, die die Welle einer Maschine nach Abb. 23 ausführen kann. Die Maschine bestehe aus vier

gleichen Zylindern, rechts sitze noch ein Schwungrad auf der Welle. Die auf die Steifigkeit $G\,J_p = 10^{10}$ kgcm² reduzierten Längen der Wellenstücke betragen

$$l_1 = l_2 = l_3 = 25 \text{ cm}, \quad l_4 = 50 \text{ cm},$$

so daß die Federzahlen

$$c_1 = c_2 = c_3 = 4 \cdot 10^8 \text{ kg cm}, \quad c_4 = 2 \cdot 10^8 \text{ kg cm}$$

lauten. Die Trägheitsmomente der Drehmassen haben die Werte

$$\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta = 100 \text{ kg cm sec}^2, \quad \Theta_4 = 2000 \text{ kg cm sec}^2.$$

Aus diesen Daten folgt

$$k = \frac{c}{\Theta} = 4 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}, \quad k_4 = \frac{c_4}{\Theta_3} = 2 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}, \quad k_4' = \frac{c_4}{\Theta_4} = 0{,}1 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}.$$

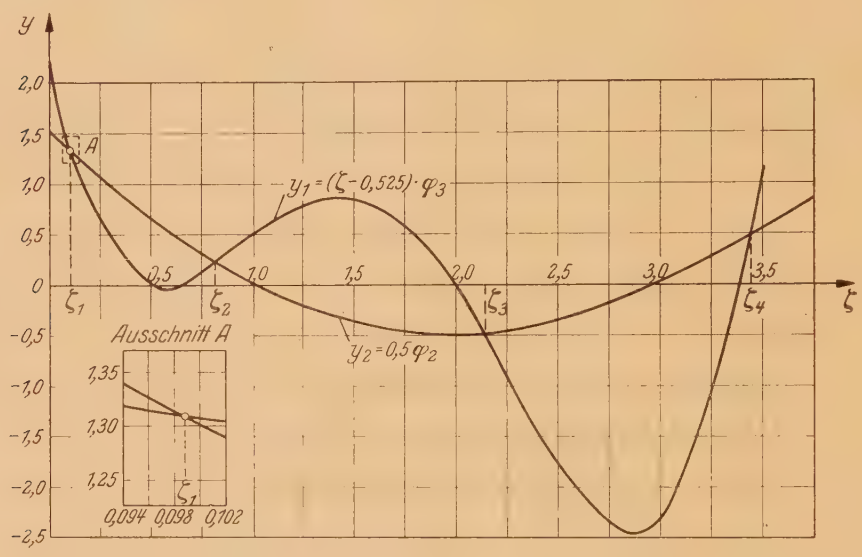


Abb. 24. Bestimmung der Eigenfrequenzen des Beispieles der Abb. 23.

Mit $k = k^*$ kommt daher

$$\gamma_4 = 0{,}5\,, \quad \gamma_4' = 0{,}025\,,$$

so daß (12.8) die Form annimmt

$$(\zeta - 0{,}525)\,\varphi_3(\zeta) = 0{,}5\,\varphi_2(\zeta)\,. \tag{12.8a}$$

Die beiden Kurven

$$y_1 = (\zeta - 0{,}525)\,\varphi_3(\zeta) \quad \text{und} \quad y_2 = 0{,}5\,\varphi_2(\zeta)$$

sind in Abb. 24 aufgezeichnet. Aus ihren vier Schnittpunkten mit den Abszissen ζ_i findet man die Quadrate z_i der Kreisfrequenzen ω_i und die Frequenzen f_i der nachstehenden Tabelle 5.

Tabelle 5. *Wurzeln der Gleichung* (12.8a).

	ζ_i	z_i in 10^6 sec^{-2}	ω_i in 10^3 sec^{-1}	f_i in Hz
$i=1$	0,099	0,396	0,63	100,3
$i=2$	0,810	3,240	1,80	287
$i=3$	2,150	8,6	2,93	467
$i=4$	3,45	13,8	3,72	592

Der gleiche Schwinger möge nun noch nach dem in Abschnitt **10** d angegebenen Verfahren von *Biber* durchgerechnet werden. Da die *Biber*schen Tabellen nur bis $n' = 10000$ min^{-1} gehen, können nur die beiden niedrigsten Eigenfrequenzen auf diese Weise ermittelt werden. Hier ist die Durchrechnung für die niedrigste Eigenfrequenz durchgeführt.

Da *Biber* seinen Werten einen Gleitmodul von $G = 8{,}28 \cdot 10^5$ kg cm^{-2} zugrunde legt, hat das J_p unseres Schwingers wegen $G\,J_p = 10^{10}$ kg cm² den Wert $J_p = 1{,}207 \cdot 10^4$ cm⁴. Überdies ist noch zu beachten, daß die *Biber*schen Tabellen für $a_0' = 100$ angelegt sind.

Mit $n' = 2700\ \mathrm{min}^{-1}$ entsprechend einem Frequenzenquadrat $z = 3{,}86 \cdot 10^5\ \mathrm{sec}^{-2}$ erhält man aus den *Biber*schen Tabellen

$$a_3' = 47{,}15 \quad \text{und daraus} \quad u_3 \doteq 0{,}4715\,,$$
$$x_4' = 2{,}4542 \cdot 10^7\ \mathrm{kg\,cm} \quad \text{und daraus} \quad x_4 = 1{,}182 \cdot 10^8\ \mathrm{kg\,cm}\,.$$

Die weitere Rechnung erfolgt nach dem *Gümbel*schen Verfahren und liefert

$$u_4 \doteq -0{,}1195, \quad x_5 = 0{,}260 \cdot 10^8\ \mathrm{kg\ cm}\,.$$

Mit $n' = 2800\ \mathrm{min}^{-1}$ oder $z = 4{,}16 \cdot 10^5\ \mathrm{sec}^{-2}$ erhält man aus den Tabellen

$$a_3' = 42{,}95\,, \quad \text{also} \quad u_3 = 0{,}4295\,,$$
$$x_4' = 2{,}5985 \cdot 10^7\ \mathrm{kg\,cm}, \quad \text{also} \quad x_4 = 1{,}255 \cdot 10^8\ \mathrm{kg\,cm}\,.$$

Die Weiterrechnung liefert

$$u_4 = -0{,}1980\,, \quad x_5 = -0{,}388 \cdot 10^8\ \mathrm{kg\,cm}\,.$$

Durch graphische lineare Interpolation findet man $z_I = 3{,}98 \cdot 10^5\ \mathrm{sec}^{-2}$ entsprechend einem $\zeta_I = 0{,}0995$. Nach dem *Grammel*schen Verfahren ergab sich $\zeta_I = 0{,}1$; es besteht also eine befriedigende Übereinstimmung.

c) Homogene Maschine mit zwei Zusatzmassen auf derselben Seite. Sind an den homogenen Kern Θ_0 bis Θ_n zwei Zusatzstücke Θ_{n+1} und Θ_{n+2} angefügt mit Wellenstücken, deren Federzahlen c_{n+1} und c_{n+2} betragen (Abb. 25), so hat man die Drillungsfunktion $\eta_{n+3}(\zeta)$, deren Nullstellen die Frequenzen bezeichnen, durch Anwendung der Rekursionsformel (11.6) auf die tabellierten Funktionen $\eta_{n+1}(\zeta)$ und $\eta_n(\zeta)$ oder die ihnen gleichwertigen φ_n und φ_{n-1} zurückzuführen. Diese Zurückführung erfordert hier zwei Schritte:

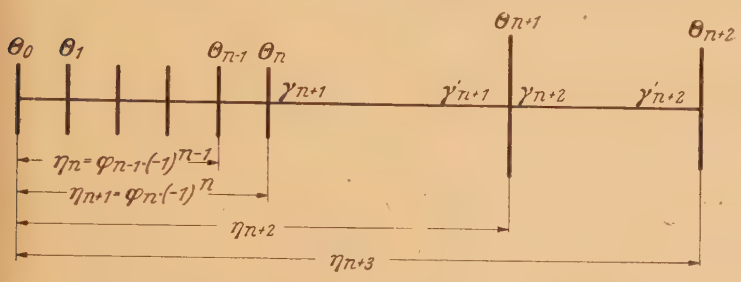


Abb. 25. Homogene Maschine mit zwei Zusatzmassen auf derselben Seite.

$$\begin{aligned}\eta_{n+3} &= \eta_{n+2}(\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2} - \zeta) - \eta_{n+1}\,\gamma_{n+2}\,\gamma'_{n+1} \\ &= [\eta_{n+1}(\gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} - \zeta) - \eta_n\,\gamma_{n+1}\,\gamma'_n]\,(\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2} - \zeta) - \eta_{n+1}\,\gamma_{n+2}\,\gamma'_{n+1}\end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\eta_{n+3} = [\zeta^2 - \zeta(\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1}) + \gamma_{n+2}\,\gamma_{n+1} + \gamma_{n+1}\gamma'_{n+2} + \\ + \gamma'_{n+2}\,\gamma'_{n+1}]\,\eta_{n+1}(\zeta) - \gamma_{n+1}(\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2} - \zeta)\,\eta_n(\zeta) = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{12.9a}$$

Beim Übergang zu den Funktionen φ tritt der Faktor (-1) in einem Glied hinzu:

$$\left.\begin{aligned}[\zeta^2 - \zeta(\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1}) + \gamma_{n+2}\,\gamma_{n+1} + \gamma_{n+1}\,\gamma'_{n+2} + \gamma'_{n+2}\,\gamma'_{n+1}]\,\varphi_n(\zeta) \\ = \gamma_{n+1}(\zeta - \gamma_{n+2} - \gamma'_{n+2})\,\varphi_{n-1}(\zeta)\,.\end{aligned}\right\} \tag{12.9b}$$

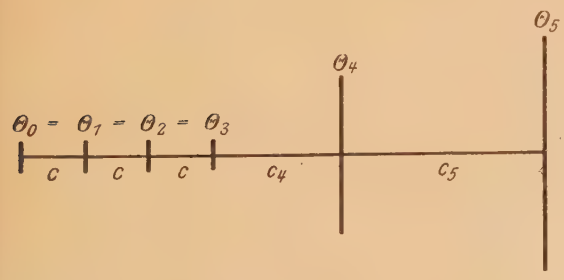


Abb. 26. Beispiel.

Auch diese Gleichung wird numerisch dadurch gelöst, daß man die beiden Seiten von (12.9b) als Funktionen von ζ aufzeichnet und die Abszissen der Schnittpunkte dieser beiden Kurven bestimmt. Hier muß die eine der tabellierten Funktionen allerdings schon mit einem in ζ quadratischen Ausdruck multipliziert werden. Die Rechenarbeit ist aber noch leicht zu bewältigen.

Wir geben auch hier ein Beispiel an. Als Schwinger diene das zuvor (in Abschnitt 12b) betrachtete, durch Abb. 23 dargestellte Gebilde, an das ein weiteres Wellenstück von der Länge $l_5 \doteq 80$ cm mit der Drehmasse $\Theta_5 = 3000\ \mathrm{kg\ cm\ sec}^{-2}$ angefügt wird (Abb. 26).

Die neu hinzukommenden „Koeffizienten" γ_5 und γ'_5 haben demgemäß die Werte

$$\gamma_5 = 0{,}015625 \quad \text{und} \quad \gamma'_5 = 0{,}010417.$$

Die Frequenzgleichung (12.9b) erhält damit die Gestalt

$$(\zeta^2 - 0{,}5510\,\zeta + 0{,}01328)\,\varphi_3 = 0{,}5\,(\zeta - 0{,}0260)\,\varphi_2\,. \tag{12.9c}$$

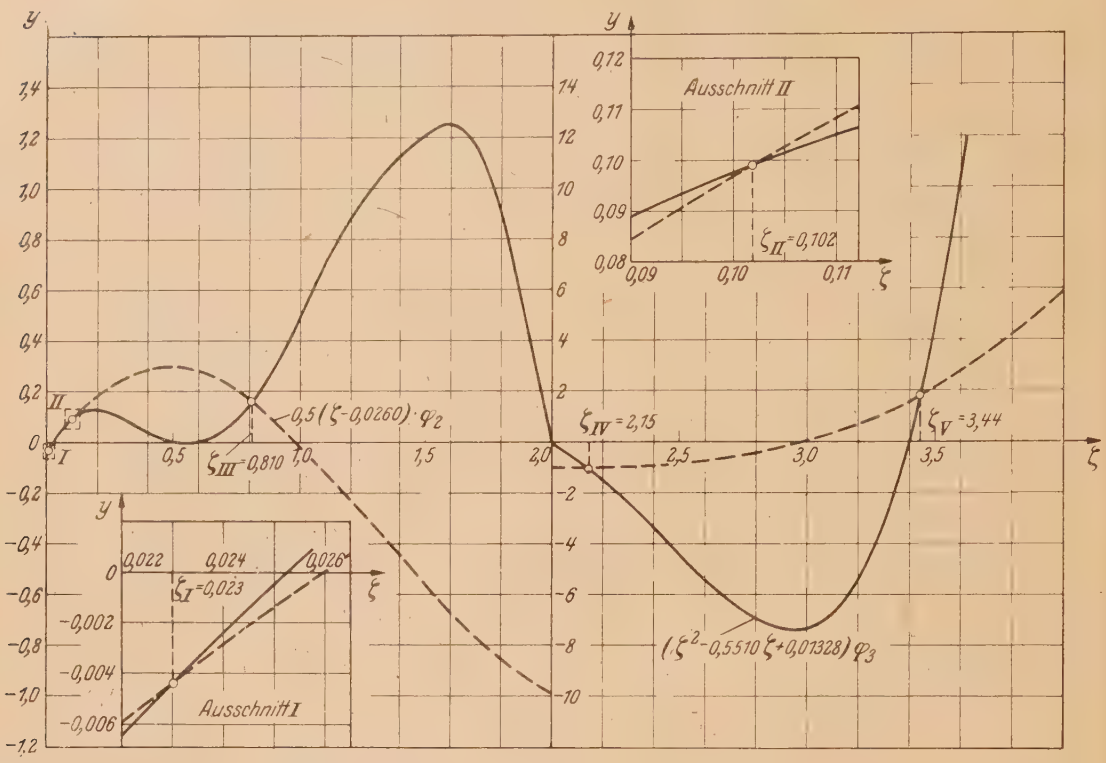


Abb. 27. Bestimmung der Eigenfrequenzen des Beispiels der Abb. 26.

Die graphische Auflösung ist in Abb. 27 vorgenommen. Man erhält so die Werte ζ_i und daraus die Frequenzen ω_i und f_i der Tabelle 6.

Tabelle 6. *Wurzeln der Gleichung* (12.9c) *und zugehörige Frequenzen.*

	z_i in 10^6 sec^{-2}	ω_i in 10^3 sec^{-1}	f_i in Hz
$\xi_I = 0{,}023$	$z_I = 0{,}092$	$\omega_I = 0{,}305$	$f_I = 48{,}6$
$\xi_{II} = 0{,}102$	$z_{II} = 0{,}408$	$\omega_{II} = 0{,}633$	$f_{II} = 100{,}5$
$\xi_{III} = 0{,}810$	$z_{III} = 3{,}24$	ω_{III} 1,800	f_{III} 287
$\xi_{IV} = 2{,}150$	$z_{IV} = 8{,}6$	$\omega_{IV} = 2{,}933$	$f_{IV} = 467$
$\xi_V = 3{,}440$	$z_V = 13{,}76$	$\omega_V = 3{,}710$	$f_V = 591$

d) Homogene Maschine mit zwei Zusatzmassen auf verschiedenen Seiten. Wenn die beiden Zusatzmassen nicht auf derselben, sondern auf verschiedenen Seiten des homogenen Kerns liegen, so stellt man folgende Überlegung an (Bezeichnungen entsprechend Abb. 28): Das Drillungsmoment eines rechts überstehenden Wellenstumpfes ist proportional der reduzierten Drillungsfunktion η_{n+3}. Diese läßt sich mittels der Rekursionsformel (11.6) ausdrücken durch die Funktionen η_{n+2} und η^*_{n+1} (vgl. Abb. 28a). Weder η_{n+2} noch η^*_{n+1} bedeuten jedoch hier Drillungsfunktionen eines homogenen Stückes; η_{n+2} bedeutet die Drillungsfunktion des Schwingers nach Abb. 28b, η^*_{n+1} die des Schwingers nach Abb. 28c; in beiden Fällen ist noch eine Zusatzdrehmasse vorhanden. Die Drillungsfunktion ist auch hier ein Maß für das (im rechten Wellenstumpf) anzubringende Drillungsmoment, das eine Schwingung mit der vorgegebenen Frequenz und einem Ausschlag $u = 1$ an der linken Drehmasse aufrecht erhält. Dieses Drillungsmoment ist nach einem allgemeinen Satz (den wir nicht explizit herleiten) gleich jenem, das im linken Wellenstumpf anzubringen wäre, um einen Ausschlag $u = 1$ an der rechten Drehmasse aufrecht zu erhalten. Wir dürfen deshalb in beiden Fällen, dem der Abb. 28b

und dem der Abb. 28c, statt der jeweils rechts anzubringenden Drillungsmomente die links notwendigen Drillungsmomente errechnen. Diese kennen wir aber, da beide Schwinger aus einem homogenen Kern mit einer Zusatzdrehmasse bestehen; der Kern hat dabei in einem Falle n homogene Drehmassen, im anderen nur $n-1$. Mit den Bezeichnungen der Abb. 28a bis c wird also

$$\eta_{n+3} = \eta_{n+2}(\gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} - \zeta) - \eta^*_{n+1}\gamma_{n+1}$$

und

$$\eta_{n+2} = \eta_{n+1}(\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2} - \zeta) - \eta_n \gamma_{n+2},$$

$$\eta^*_{n+1} = \eta_n(\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2} - \zeta) - \eta_{n-1}\gamma_{n+2}.$$

Die Funktionen η_{n+1}, η_n und η_{n-1} gehören jetzt zu einem homogenen Schwinger, sind also bekannte Funktionen von ζ. Gehen wir unter Benutzung von (12.2) noch zu den Funktionen φ über und benutzen ferner deren Rekursionsformel (12.3), so kommt schließlich

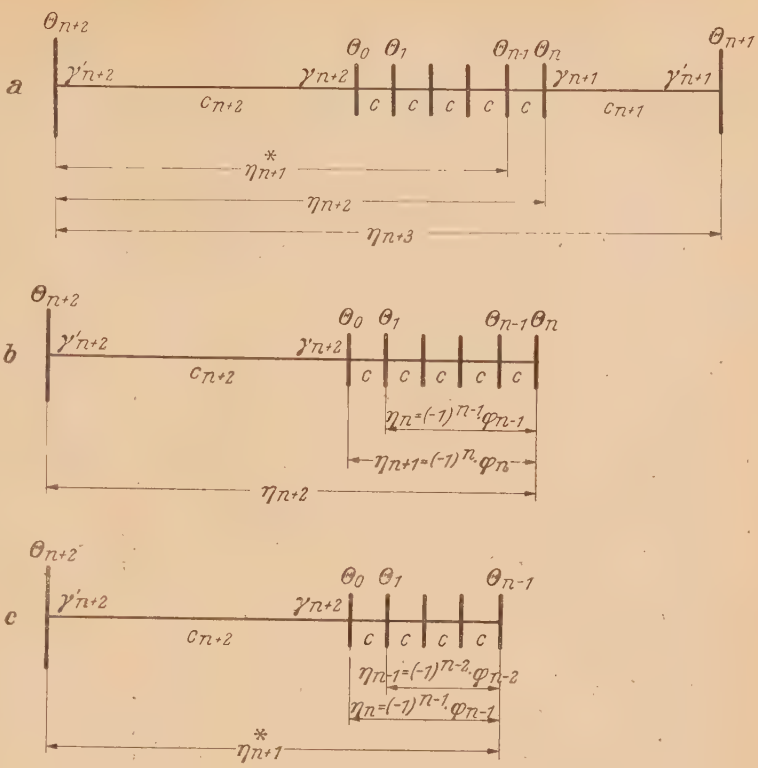


Abb. 28. Homogene Maschine mit zwei Zusatzmassen auf verschiedenen Seiten des homogenen Kerns.

$$\left.\begin{aligned}&[\zeta^2 - (\gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} + \gamma_{n+2} + \gamma'_{n+2})\,\zeta + (\gamma_{n+1}\gamma'_{n+2} + \gamma'_{n+1}\gamma_{n+2} + \gamma'_{n+1}\gamma'_{n+2}]\,\varphi_n \\ &\quad = [(\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} - \gamma_{n+1}\gamma_{n+2})\,\zeta - (\gamma_{n+1}\gamma'_{n+2} + \gamma'_{n+1}\gamma_{n+2})]\,\varphi_{n-1}.\end{aligned}\right\} \quad (12.10)$$

Auch hier treten als Faktoren der bekannten Funktionen φ ein quadratischer und ein linearer Ausdruck auf, ebenso wie dies in (12.9b) bei zwei Drehmassen der Fall war, die auf derselben Seite des homogenen Kerns lagen. Die Faktoren sind jedoch hier anders aufgebaut als dort. Gelöst wird die Gleichung (12.10) ebenso wie die früher besprochene dadurch, daß zwei Kurven gezeichnet und zum Schnitt gebracht werden.

Wir geben auch hier ein Beispiel. Es handele sich um den Schwinger nach Abb. 29. Seine Daten sind

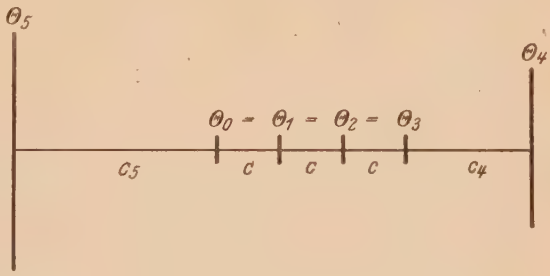


Abb. 29. Beispiel.

$$\begin{aligned}&\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 \quad \Theta = 100 \text{ kg cm sec}^2,\\ &\Theta_4 = 2000 \text{ kg cm sec}^2,\\ &\Theta_5 = 3000 \text{ kg cm sec}^2,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&l_1 = l_2 = l_3 = l = 25 \text{ cm},\\ &l_4 = 50 \text{ cm},\\ &l_5 = 80 \text{ cm}\end{aligned}\right\} \text{ in Bezug auf } G J_p = 10^{10} \text{ kg cm}^2.$$

Mit

$$k^* = \frac{G J_p}{\Theta l} = 4 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$$

wird

$$\gamma_{n+1} = 0{,}5\,, \qquad \gamma'_{n+1} = 0{,}025\,,$$
$$\gamma_{n+2} = 0{,}3125\,, \qquad \gamma'_{n+2} = 0{,}010417\,.$$

Damit wird also (12.10) zu

$$(\zeta^2 - 0{,}8479\,\zeta + 0{,}0133)\,\varphi_3(\zeta) = (0{,}6563\,\zeta - 0{,}0130)\,\varphi_2(\zeta)\,. \tag{12.10a}$$

Die graphische Lösung dieser Gleichung zeigt Abb. 30. Die Abszissenwerte der Schnittpunkte und damit die Frequenzen sind in der Tabelle 7 verzeichnet.

Tabelle 7. *Wurzeln der Gleichung* (12.10a) *und daraus folgende Frequenzen.*

	z_i in 10^6 sec^{-2}	ω_i in 10^3 sec^{-1}	f_i in Hz
$\zeta_I = 0{,}010$	$z_I = 0{,}04$	$\omega_I = 0{,}200$	$f_I = 31{,}9$
$\zeta_{II} = 0{,}196$	$z_{II} = 0{,}784$	$\omega_{II} = 0{,}885$	$f_{II} = 141$
$\zeta_{III} = 0{,}940$	$z_{III} = 3{,}760$	$\omega_{III} = 1{,}939$	$f_{III} = 308{,}8$
$\zeta_{IV} = 2{,}230$	$z_{IV} = 8{,}920$	$\omega_{IV} = 2{,}987$	$f_{IV} = 475{,}6$
$\zeta_V = 3{,}470$	$z_V = 13{,}88$	$\omega_V = 3{,}726$	$f_V = 593{,}3$

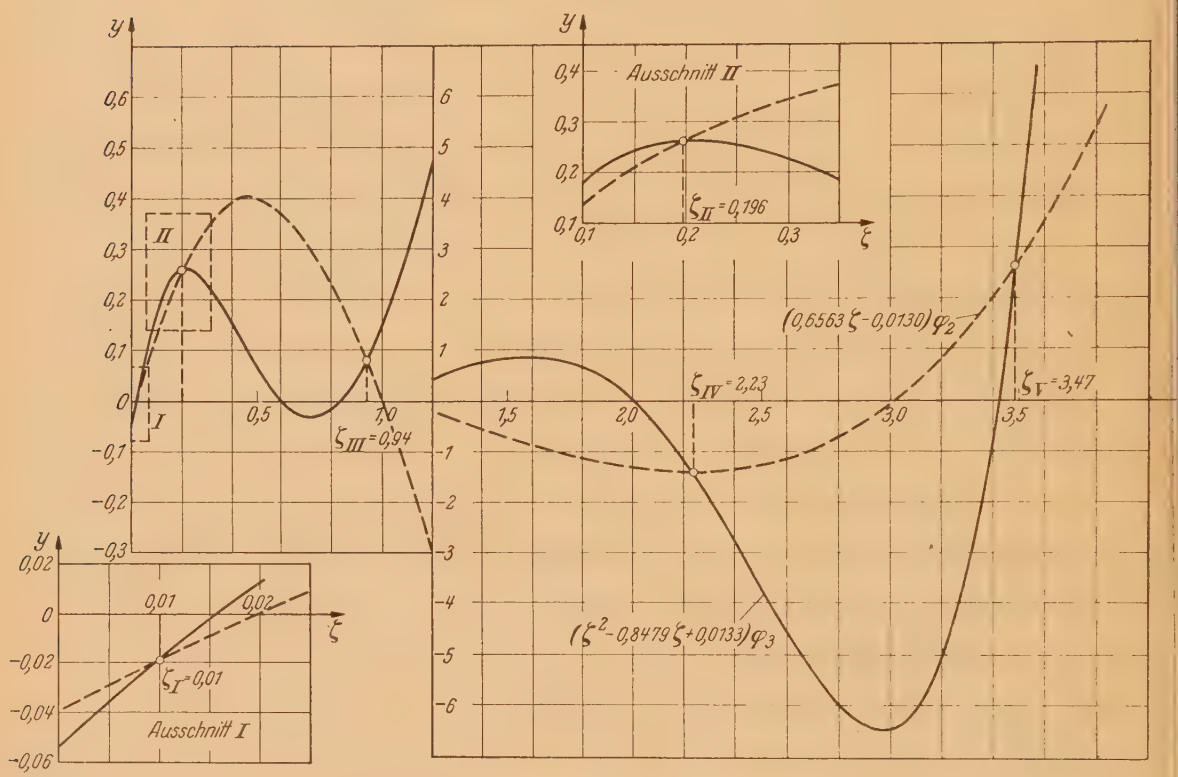


Abb. 30. Bestimmung der Eigenfrequenzen des Beispiels der Abb. 29.

Wenn mehr als zwei Zusatzmassen berücksichtigt werden müssen, so werden die Faktoren, mit denen die bekannten Funktionen φ multipliziert werden, von höherem als dem zweiten Grad. Explizit ausgerechnete Formeln für solche Fälle, aber auch für andere Zusammenstellungen und Gruppierungen von Maschinen und Maschinenteilen, wie z. B. eine aus zwei homogenen Aggregaten aufgebaute Maschine, für verzweigte Wellenleitungen u. dgl. finden sich in den unter [18] genannten Originalarbeiten von *R. Grammel* sowie in dem ebendort aufgeführten Buche von *C. B. Biezeno* und *R. Grammel.*

13. Die Methode der Differenzenrechnung. (Vorschläge von *P. Funk* [25] und *L. Collatz – Th. Pöschl* [27].) Alle Aussagen, die sich auf einen „homogenen" Schwinger beziehen, mögen sie nun in der Form der *Grammel*schen Frequenzfunktionen $\varphi_\lambda(\zeta)$, als Tabellenwerte für die Einheitswelle nach *Biber* oder sonstwie auftreten, lassen sich in sehr übersichtlicher Weise mit Hilfe der Differenzenrechnung gewinnen. In dieser Darstellung lassen sich dann auch eine Reihe allgemeiner Sätze leicht ablesen, die sonst nur mühsam herzuleiten wären. Überdies kann man

an diese Ergebnisse der Differenzenrechnung nomographische Methoden zur weiteren Behandlung der Frequenzengleichungen anschließen.

Die Rekursionsformel (12.1) für die reduzierte Drillungsfunktion eines homogenen Schwingers läßt sich in die Gestalt

$$\eta_{\lambda+1} + (\zeta - 2)\,\eta_\lambda + \eta_{\lambda-1} = 0 \tag{13.1}$$

setzen und als eine Differenzengleichung auffassen.

Eine Differenzengleichung der Bauart (13.1) läßt partikulare Lösungen sowohl der Form $\eta_\lambda = \sin \alpha\lambda$ wie auch der Form $\eta_\lambda = \cos \alpha\lambda$ zu. Der Parameter α hängt dabei von den Koeffizienten der Differenzengleichung ab. In unserem Fall findet man durch Einsetzen entweder von $\sin \alpha\lambda$ oder von $\cos \alpha\lambda$ in (13.1) als Beziehung zwischen dem Parameter α und dem Frequenzparameter ζ

$$\cos \alpha = \frac{2-\zeta}{2} \quad \text{oder} \quad \zeta = 2(1 - \cos \alpha)\,. \tag{13.2}$$

Aus den partikularen Lösungen baut sich die allgemeine auf; sie lautet

$$\eta_\lambda = A \cos \alpha\lambda + B \sin \alpha\lambda\,. \tag{13.3a}$$

Die Integrationskonstanten A und B bestimmen sich dabei aus den Randbedingungen. Diese lauten für unsere reduzierten Drillungsfunktionen η_λ [vgl. (12.1)]

$$\eta_0 = 0 \quad \text{und} \quad \eta_1 = 1\,. \tag{13.3}$$

Sie liefern $A = 0$, $B = 1/\sin \alpha$. So kommt als Lösung von (13.1) mit den Randbedingungen (13.3)

$$\eta_\lambda = \frac{\sin \alpha\lambda}{\sin \alpha} \tag{13.4}$$

zustande. Die Frequenzengleichung eines homogenen Schwingers lautet wegen $\eta_{n+1} = 0$ demnach

$$\sin(n+1)\,\alpha = 0\,; \tag{13.5}$$

der Zusammenhang zwischen α und ζ wird dabei durch (13.2) geliefert. Die Wurzeln α_m von (13.5) lassen sich schreiben als

$$(n+1)\,\alpha_m = m\,\pi\,.$$

Damit wird

$$\zeta_m = 2\left(1 - \cos \frac{m\pi}{n+1}\right). \tag{13.6}$$

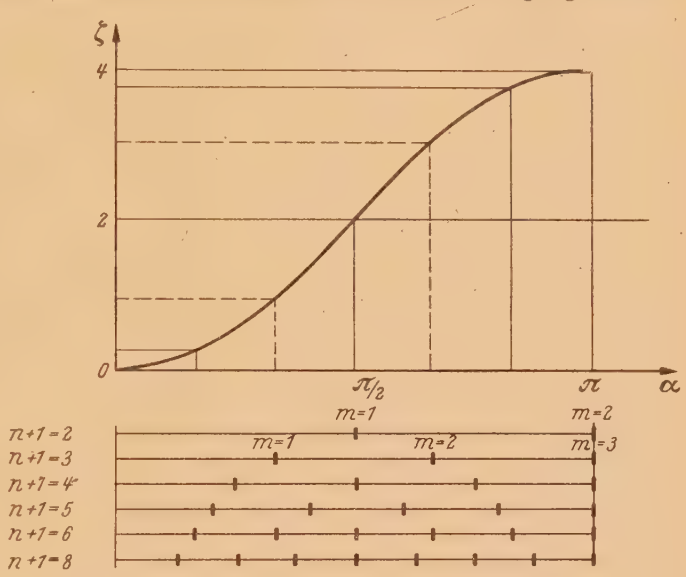


Abb. 31. Verteilung der Nullstellen eines homogenen Schwingers.

Der durch (13.6) gelieferte Zusammenhang läßt sich leicht graphisch veranschaulichen (Abb. 31.)

Übrigens folgt aus (13.6) sofort der von *R. Grammel* ausgesprochene (in Abschnitt **12** noch nicht erwähnte) Satz, daß alle $\zeta_i \leqq 4$ bleiben; ferner folgen sofort die (in Abschnitt **12a** ohne Beweis ausgesprochenen) Sätze über die Verteilung der Nullstellen der Funktionen φ in dem Bereich $0 < \zeta < 4$, so z. B. (12.4c) und (12.4d) und die Werte der Tabelle 4.

Aus (13.4) folgt wegen (12.2)

$$\varphi_\lambda = (-1)^\lambda \frac{\sin \alpha(\lambda+1)}{\sin \alpha}\,. \tag{13.4a}$$

Damit haben wir für die Frequenzfunktionen φ_λ neben der Potenzreihendarstellung von Abschnitt **12d** eine Darstellung durch trigonometrische Funktionen gewonnen. Wesentlicher aber als die Art der Darstellung und der Herleitung der Funktionen η_λ oder φ_λ ist für den praktischen Gebrauch der Funktionen das Vorhandensein von Tabellen der Funktionswerte. In den erwähnten *Grammel*schen Arbeiten sind die Funktionen φ_λ für $\lambda = 1$ bis $\lambda = 12$ tabuliert.

Auch wenn Zusatzmassen vorhanden sind, läßt sich die Frequenzengleichung auf trigonometrische Ausdrücke zurückführen. Wir zeigen das explizit nun für den Fall einer einzigen Zusatzmasse, wie er in Abschnitt **12b** schon behandelt worden ist, und verweisen im übrigen auf die Arbeit von *L. Collatz* und *Th. Pöschl* [27].

Aus (12.7) folgt zunächst wegen $\eta_{n+2}=0$ die Gleichung

$$\eta_{n+1}(\zeta-\gamma_{n+1}-\gamma'_{n+1})+\eta_n\,\gamma_{n+1}=0; \tag{13.7a}$$

dazu aus (12.1)

$$\eta_{\lambda+1}+(\zeta-2)\eta_\lambda+\eta_{\lambda-1}=0 \tag{13.7b}$$

für alle λ von n bis 1, mit $\eta_0=0$. Die Gleichungen (13.7b) (mit der Randbedingung $\eta_0=0$) werden durch den Ansatz $\eta_\lambda=\sin\alpha\lambda$ sämtlich befriedigt; führt man den Ansatz auch noch in die Gleichung (13.7a) ein (die die zweite „Randbedingung" $\eta_{n+2}=0$ enthält), so folgt

$$(\zeta-\gamma_{n+1}-\gamma'_{n+1})\sin\alpha\,(n+1)+\gamma_{n+1}\sin\alpha n=0 \tag{13.8}$$

als Frequenzgleichung. Die $n+1$ Wurzeln α_i dieser Gleichung liefern dann mit Hilfe von (13.2) die Eigenfrequenzen. *L. Collatz* und *Th. Pöschl* zeigen überdies, wie sich z. B. eine Gleichung der Bauart (13.8) für eine nomographische Darstellung eignet.

14. Die Ersatzmasse. (Vorschläge und Verfahren von *F. Saß* [10], *J. Geiger* [13], *H. Behrens* [16], *L. Kalichman* [24], *W. Behrmann* [26], *L. Strunz* [28], *P. Funk* [25], *W. Benz* [15] und *F. Porter* [19].) Jetzt wollen wir uns mit einem Gedankengang vertraut machen, der — ob ausgesprochen oder nicht — einer sehr großen Anzahl von Verfahren zugrunde liegt, mit dem Gedanken nämlich, daß die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Massen eines Schwingers dadurch verringert werden kann, daß eine Reihe von ihnen zu einer einzigen Masse, einer „Ersatzmasse", zusammengefaßt wird. Nahegelegt wird die angedeutete Überlegung dadurch, daß die Eigenfrequenzen eines Zwei-Massen-Systems aus einer linearen, die eines Drei-Massen-Systems aus einer quadratischen Gleichung [s. z. B. (11.4a)] bestimmt werden. Die Einfachheit dieser Bestimmungsgleichungen erregt immer wieder den Wunsch, mit solchen Zwei- oder Drei-Massen-Systemen ein Auslangen zu finden.

Wir fragen also: Können, etwa im Schwinger der Abb. 1, die $\lambda+1$ ersten Drehmassen von Θ_0 bis Θ_λ zu einer einzigen Drehmasse $\hat{\Theta}$ zusammengefaßt werden, die (etwa) am Ort der Masse Θ_λ sitzen soll? Und wie groß ist dann diese Ersatzdrehmasse $\hat{\Theta}$?

Die Wirkung der wegzunehmenden Drehmassen Θ_0 bis Θ_λ auf das rechts von ihnen liegende Stück der Welle besteht allein in der Wirkung ihrer Trägheitskräfte, durch die das Drillungsmoment $x_{\lambda+1}$ bestimmt wird. Erzeugen die Trägheitskräfte der neuen Masse $\hat{\Theta}$ dasselbe Drillungsmoment $x_{\lambda+1}$, so ist $\hat{\Theta}$ den Massen Θ_0 bis Θ_λ gleichwertig. Das Drillungsmoment $x_{\lambda+1}$ findet man [vgl. 10.1a)] aus

$$x_{\lambda+1}=z\sum_{\nu=0}^{\lambda}\Theta_\nu\,u_\nu\,.$$

Im Ersatzsystem, wo $\hat{\Theta}$ an der Stelle der Masse Θ_λ sitzt, gilt

$$x_{\lambda+1}=z\,\hat{\Theta}\,u_\lambda\,.$$

Gleichsetzung dieser beiden Drillungsmomente liefert für die Ersatzmasse den Ausdruck

$$\hat{\Theta}=\frac{\sum_{\nu=0}^{\lambda}\Theta_\nu\,u_\nu}{u_\lambda}\,. \tag{14.1}$$

Die Ausschläge u hängen dabei von der Frequenz ab; demgemäß ist auch die Ersatzmasse $\hat{\Theta}$ eine frequenzabhängige Größe.

Nehmen wir nun einmal an, die Ersatzmasse $\hat{\Theta}$ sei bekannt oder als eine bekannte Funktion der Frequenz darstellbar (daß das der Fall ist, werden wir im nächsten Abschnitt noch im einzelnen zeigen). Wenn dann außer den $\lambda+1$ schon zusammengefaßten Massen Θ_0 bis Θ_λ nur noch eine einzige weitere Masse $\Theta_{\lambda+1}$ im Schwinger vorhanden ist, so kann die Frequenz des nunmehr aus den beiden Massen $\hat{\Theta}$ und $\Theta_{\lambda+1}$ bestehenden Schwingers nach der Zwei-Massen-Formel bestimmt werden. Diese lautet

$$z=c_{\lambda+1}\left[\frac{1}{\hat{\Theta}}+\frac{1}{\Theta_{\lambda+1}}\right].$$

Löst man diese Gleichung nach $1/\hat{\Theta}$ auf, so erhält man zunächst

$$\frac{1}{\hat{\Theta}(z)}=\frac{z}{c_{\lambda+1}}-\frac{1}{\Theta_{\lambda+1}}$$

oder, mit Hilfe zweier noch näher festzulegender Werte c^* und Θ^* dimensionslos gemacht,

$$\frac{\Theta^*}{\hat{\Theta}(\zeta)} = \zeta \frac{c^*}{c_{\lambda+1}} - \frac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1}} . \tag{14.2}$$

Darin ist wie in Abschnitt 12a die Abkürzung

$$\zeta = \frac{z}{k^*} = \frac{z\,\Theta^*}{c^*} .$$

Wäre also $\Theta^*/\hat{\Theta}$ als Funktion von z bzw. ζ bekannt, so hätte man die Kurve $\Theta^*/\hat{\Theta}(\zeta) = \beta(\zeta)$ mit der durch die rechte Seite von (14.2) bestimmten Geraden

$$y_1(\zeta) = \zeta \frac{c^*}{c_{\lambda+1}} - \frac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1}} \tag{14.2a}$$

zum Schnitt zu bringen. Die Abszissen ζ_i dieser Schnittpunkte lieferten dann die Eigenfrequenzen (Abb. 32). Daß man diesen Weg tatsächlich beschreiten kann, werden wir im nächsten Abschnitt explizit zeigen.

Wenn außer den in $\hat{\Theta}$ zusammengefaßten Massen noch zwei weitere Massen vorhanden sind, so benutzt man die Drei-Massen-Formel

$$z^2 - z\left(\frac{c_{\lambda+1}}{\hat{\Theta}} + \frac{c_{\lambda+1}}{\Theta_{\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda+2}}{\hat{\Theta}} + \frac{c_{\lambda+2}}{\Theta_{\lambda+1}}\right) + \frac{c_{\lambda+1}\,c_{\lambda+2}}{\hat{\Theta}\,\Theta_{\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda+1}\,c_{\lambda+2}}{\hat{\Theta}\,\Theta_{\lambda+2}} + \frac{c_{\lambda+1}\,c_{\lambda+2}}{\Theta_{\lambda+1}\Theta_{\lambda+2}} = 0 .$$

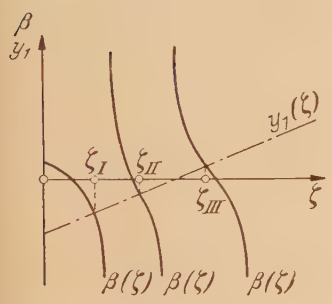


Abb. 32. Ermittelung der Wurzeln ζ_i der Gl. (14.2).

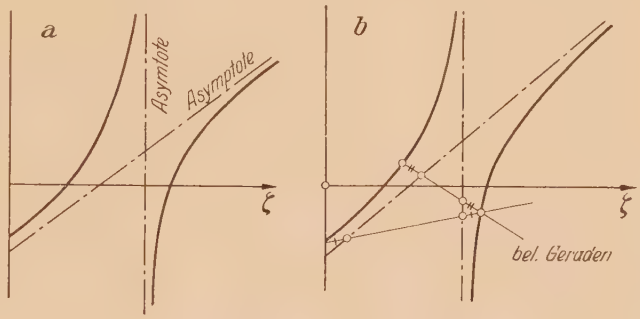


Abb. 33. Hyperbel, Konstruktion der Asymptoten.

Nach $1/\hat{\Theta}$ aufgelöst (und unter Benutzung zweier noch offen gelassener Größen c^* und Θ^* dimensionslos geschrieben) lautet sie

$$\frac{\Theta^*}{\hat{\Theta}} = \frac{c^*}{c_{\lambda+1}}\zeta - \frac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1}} - \frac{\dfrac{c_{\lambda+2}}{c^*}\left(\dfrac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1}}\right)^2}{\zeta - \dfrac{c_{\lambda+2}}{c^*}\left(\dfrac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1}} + \dfrac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+2}}\right)} . \tag{14.3}$$

Die rechte Seite ist ein Ausdruck der Bauart

$$y_2(\zeta) = A\,\zeta - B - \frac{C}{\zeta - D} , \tag{14.3a}$$

so daß $y_2(\zeta)$ eine Hyperbel liefert. Die eine Asymptote dieser Hyperbel ist die Gerade

$$y = A\,\zeta - B;$$

dies ist, wie man durch Vergleich mit (14.2a) feststellt, genau dieselbe Gerade, die bei der Betrachtung des Zwei-Massen-Systems auftrat. Sie schneidet die Ordinatenachse bei

$$y = -B = -\frac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1}} ;$$

ihre Steigung ist gegeben durch $A = c^*/c_{\lambda+1}$, so daß ihr Schnittpunkt mit der ζ-Achse bei $\zeta = \dfrac{B}{A} = \dfrac{c_{\lambda+1}}{\Theta_{\lambda+1}}/k^*$ liegt. Die zweite Asymptote ist die zur Ordinatenachse parallele Gerade

$$\zeta = D .$$

Sie schneidet die ζ-Achse im Punkte

$$D = \frac{c_{\lambda+2}}{c^*}\left(\frac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1}} + \frac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+2}}\right) . \tag{14.4}$$

Die Asymptoten lassen sich also leicht in das Koordinatensystem einzeichnen (Abb. 33a).

Die Hyperbel selbst beginnt für $\zeta = 0$ mit dem Wert

$$y = -B + \frac{C}{D} = -\frac{\Theta^*}{\Theta_{\lambda+1} + \Theta_{\lambda+2}}.$$

Man kennt also einen Hyperbelpunkt und die Asymptoten. Damit läßt sich die Hyperbel, sogar ohne daß weitere Punkte berechnet werden müssen, konstruieren.

Diese Konstruktion (Abb. 33b) sei kurz beschrieben: Man zieht durch den bekannten Punkt irgendeine Gerade, trägt den Abschnitt vom bekannten Punkt bis zum Schnittpunkt mit der ersten Asymptote von der zweiten Asymptote aus ab; dann ist der Endpunkt der so aufgetragenen Strecke wieder ein Punkt der Hyperbel. Von diesem neuen Hyperbelpunkt aus kann die Konstruktion dann wiederholt und beliebig oft fortgesetzt werden.

Die Eigenschwingzahlen des aus der Ersatzmasse und den beiden Massen $\Theta_{\lambda+1}$ und $\Theta_{\lambda+2}$ bestehenden Schwingers erhält man also aus den Abszissen der Schnittpunkte der Kurve $\Theta^*/\hat{\Theta}(\zeta)$ mit der so beschriebenen Hyperbel (Abb. 34).

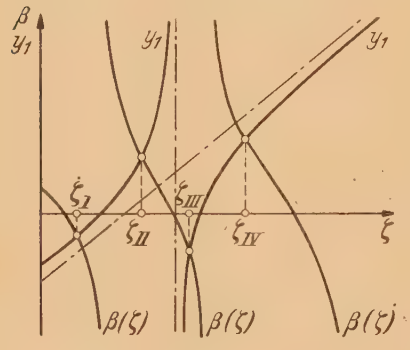


Abb. 34. Ermittelung der Wurzeln ζ_i der Gl. (14.3).

Im nachfolgenden Abschnitt **15** werden wir erörtern, wie die reziproken Werte $1/\hat{\Theta}$ der Ersatzmasse als Funktion der Frequenz oder des Frequenzquadrates gefunden werden. Besondere Bedeutung wird die Zusammenfassung mehrerer Massen zu einer Ersatzmasse natürlich dort haben, wo eine solche Zusammenfassung einfach und übersichtlich wird, nämlich bei den „homogenen" Teilen des Schwingers; wir werden uns deshalb bei den Betrachtungen im nachfolgenden Abschnitt im wesentlichen um die Zusammenfassung der Drehmassen des „homogenen" Teiles des Schwingers bemühen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts erwähnen wir unter Hinweis auf die betreffenden Literaturstellen noch kurz die Etappen, in denen sich die Vorstellung von der Ersatzmasse entwickelt hat. Die erste Erwähnung der Möglichkeit einer Zusammenfassung verschiedener Massen zu einer einzigen findet sich bei *F. Saß* [10], die nächste bei *J. Geiger* [13]. Hier wird allerdings noch empfohlen, für die (nicht auf die Stelle λ, sondern auf die Mitte des homogenen Teils reduzierte) Ersatzmasse $\hat{\Theta}$ einen geschätzten Bruchteil k der Summe aller Massen des homogenen Teiles einzusetzen,

$$\hat{\Theta} = k \sum_{\nu=1}^{n} \Theta_\nu, \tag{14.5}$$

und für k (unabhängig von der Frequenz) Werte in der Nähe von 0,85 zu wählen. Die dann folgenden Arbeiten von *Behrens* [16] beschäftigen sich mit dem Schwinger, der aus einem homogenen Teil und einer Zusatzmasse besteht, schon in ungefähr der gleichen Form, die wir dieser Aufgabe hier gegeben haben. In der ersten *Behrens*schen Arbeit wird noch vorgeschlagen, die Funktion $\Theta^*/\hat{\Theta}(\zeta)$ im Intervall $0 < \zeta < 0{,}15$ durch Geraden oder Parabeln anzunähern. In der zweiten erscheint dann schon ein Bild, das unserer Abb. 32 entspricht.

Der Frage, wie man vorgehen könne, falls außer dem homogenen Teil noch zwei Zusatzmassen vorhanden sind, wenden sich *Kalichman* [24], *Behrens* [26] und *Struntz* [28] zu. Aber alle drei Verfasser schlagen noch Umwege ein. *Kalichman* und *Behrens* wollen die Aufgabe in zwei Schritten, d. h. unter zweimaliger Anwendung der Zwei-Massen-Formel lösen, wobei *Kalichman* vorschlägt, zuerst den homogenen Teil zusammenzufassen, dann die erste Zusatzmasse hinzuzufügen, während *Behrmann* zunächst eine Ersatzmasse für die beiden Zusatzmassen sucht und dann ein Zwei-Massen-System aus der Ersatzmasse des homogenen Teiles und jener Ersatzmasse der Zusatzmassen bildet.

L. Struntz löst die Aufgabe unter Zuhilfenahme einer Reihe von Kurvenblättern. Das Vorgehen von *Struntz* weist im übrigen eine Reihe von Zügen auf, die an die Drillungsfunktion $\eta(\zeta)$ (Abschnitt **12**) und Ausschlagfunktion $\alpha(\zeta)$ (Abschnitt **15**) eines „homogenen Kerns" erinnern. Die Überlegungen sind aber weniger weit durchgeführt als die hier in Abschnitt **21** oder **15** angegebenen. Eine weitere Bezugnahme auf die Darlegungen von *Struntz* erübrigt sich hier deshalb.

Der Gedanke, die Drei-Massen-Formel in der Gestalt (14.3) anzuwenden, also die Kurven $\Theta^*/\Theta(\zeta)$ des homogenen Schwingers mit der Hyperbel nach Abb. 34 zu schneiden, findet sich zuerst bei *P. Funk* [25]. Er ist dann von *B. Frank* [30] und *R. Arnold* [33] weiter ausgebaut worden, wie im Abschnitt **15** noch im einzelnen dargelegt werden wird.

Schließlich möge hier noch zweier Verfahren Erwähnung getan werden, die sich in einer Hinsicht von allen sonst in diesem Bericht behandelten unterscheiden. Während nämlich allen sonstigen Verfahren die Abb. 1 zugrunde liegt, wo allein die Scheiben ein Trägheitsmoment aufweisen, die Wellenstücke zwischen den Scheiben dagegen trägheitsfrei sind, behandeln *W. Benz* [15] und *F. Porter* [19] den „homogenen Kern" einer Maschine als eine kontinuierlich mit Masse (Trägheitsmomenten) versehene Welle. Die Frequenzengleichung eines solchen Gebildes ist keine algebraische Gleichung mehr, sondern wird zu einer transzendenten. Eine homogene Maschine mit einer oder mit zwei Zusatzmassen erscheint dann unter dem Bild der Abb. 35a oder b. Dabei bedeutet Θ_1 das gesamte Trägheitsmoment des homogenen Teils des Schwingers, l_1 die Länge, über die dieses Trägheitsmoment gleichmäßig verteilt ist.

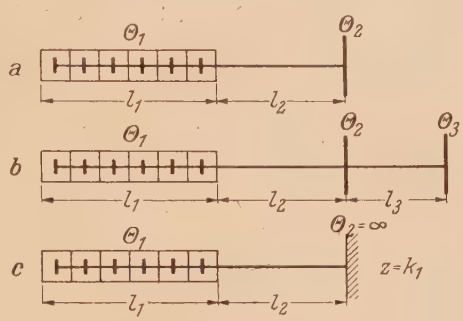


Abb. 35. Ersatzsysteme mit verteilter Masse.

Die transzendente Gleichung für den Schwinger mit einer Zusatzmasse nach Abb. 35a lautet

$$\sqrt{\zeta}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\zeta}+\frac{\Theta_1}{\Theta_2}=\frac{l_2}{l_1}\,\zeta \tag{14.6a}$$

oder

$$\mathrm{tg}\,\sqrt{\zeta}=\frac{\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\sqrt{\zeta}}{-1+\frac{l_2\,\Theta_2}{l_1\,\Theta_1}\,\zeta}, \tag{14.6b}$$

wobei die gemäß (11.5) in ζ steckende Größe k^* hier den Wert

$$k^*=\frac{G\,J_p}{l_1\,\Theta_1}$$

hat.

Benz gibt für die Eigenschwingungszahlen der ersten und der zweiten Ordnung jeweils eine Kurventafel an, aus der $\sqrt{\zeta}$ mit den Parametern Θ_1/Θ_2 und l_1/l_2 abgelesen werden kann. Den Schwinger mit zwei Zusatzmassen nach Abb. 35b führt *Benz* auf ein Drei-Massen-System zurück, für das die zweite Gleichung (11.4a) gilt; für k_1 wird das Eigenfrequenzquadrat des Schwingers Abb. 35c eingesetzt, das aus (14.6) (besser aus den Kurventafeln des *Benz*schen Aufsatzes) mit $\Theta_1/\Theta_2=0$ gewonnen werden kann.

Nach *Porter* löst man die transzendente Gleichung (14.6b) oder die ihr bei zwei Zusatzmassen entsprechende (die wir hier unterdrücken) jeweils dadurch, daß linke und rechte Seite (als Funktion von $\sqrt{\zeta}$) aufgezeichnet und zum Schnitt gebracht werden.

Hinsichtlich der Genauigkeit des Verfahrens sei auf die Bemerkungen im Teil **D** dieses Berichtes verwiesen.

15. Die Ausschlagfunktionen und ihre Weiterbildung durch *B. Frank* [30] und *R. Arnold* [33].

a) Die allgemeinen Ausschlagfunktionen. Um den gewünschten Ersatz einer Reihe von Massen durch eine einzige Masse durchführen zu können, bedarf man der Kenntnis der Ausschläge u_λ sowie der Summe der Ausschläge u_0 bis u_λ. Wir befassen uns daher nun mit diesen Ausschlägen, und zwar in einer ähnlichen Weise wie in Abschnitt **11** mit den Drillungsmomenten. Ja, wir werden besonderen Wert darauf legen, die Darlegungen an dieser Stelle so abzufassen, daß die Analogie zu den Entwicklungen in den Abschnitten **11**, **12** und **13** deutlich wird. Hinweise auf Veröffentlichungen können dabei zunächst nicht gegeben werden.

In Abschnitt **11** hatten wir aus den Grundgleichungen (4.6) durch Elimination der Ausschläge eine Rekursionsformel, nämlich (11.1a), für die Drillungsmomente gewonnen. Eliminiert man aus (4.6) jedoch die Drillungsmomente, so erhält man eine Rekursionsformel für die Ausschläge. Sie lautet, wenn man sogleich durch Θ_λ dividiert und von den Abkürzungen (2.6) Gebrauch macht,

$$u_\lambda\,k_\lambda=u_{\lambda-1}\,(k_\lambda+k'_{\lambda-1}-z)-u_{\lambda-2}\,k'_{\lambda-1} \tag{15.1}$$

und ist in dieser Form das Gegenstück zu (11.1b). Gleichung (15.1) gilt für $\lambda=1,2\ldots n$, wenn man beachtet, daß wegen $c_0=0$ auch $k_0'=0$ ist. An der Gleichung (15.1) kann man nun Umformungen vornehmen, wie sie den in Abschnitt **11** ausgeführten entsprechen.

Analog dem relativen Drillungsmoment definieren wir zunächst einen relativen Ausschlag u_λ/u_0. Setzt man (wie wir das schon oft getan haben) u_0 von vornherein gleich eins, so können die Werte u_λ selbst als relative Ausschläge dienen. Um den Faktor k_λ auf der linken Seite von (15.1) zu beseitigen, bilden wie (analog den Drillungsfunktionen g_λ) jetzt „Ausschlagfunktionen" f_λ gemäß

$$f_\lambda(z) = \frac{u_\lambda(z)}{u_0} \prod_{\nu=1}^{\lambda} k_\nu \,. \tag{15.2}$$

Diese neuen Funktionen sind verbunden durch die Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} &f_\lambda = f_{\lambda-1}(k_\lambda + k_{\lambda-1}' - z) - f_{\lambda-2}\, k_{\lambda-1}'\, k_{\lambda-1} \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n) \\ \text{mit}\quad &f_0 = 1\,, \quad f_1 = (k_1 - z)\,. \end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

Wie die u_λ, so sind auch die f_λ ganze rationale Funktionen in z vom Grade λ. Division durch k^* (wie in Abschnitt **11**) schafft schließlich die „reduzierten Ausschlagfunktionen"

$$\alpha_\lambda = \frac{f_\lambda}{k^{*\lambda}}\,. \tag{15.4}$$

Für sie gilt die Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_\lambda(\zeta) = \alpha_{\lambda-1}(\zeta)\,[\gamma_\lambda + \gamma_{\lambda-1}' - \zeta] - \alpha_{\lambda-2}(\zeta)\,\gamma_{\lambda-1}\,\gamma_{\lambda-1}' \qquad (\text{für } \lambda=2,3\ldots n) \\ \text{mit}\quad &\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \gamma_1 - \zeta\,. \end{aligned}\right\} \tag{15.5}$$

Diese reduzierten Ausschlagfunktionen $\alpha_\lambda(\zeta)$ sind dimensionslose Ausdrücke, die ganze rationale Funktionen in $\zeta = z/k^*$ vom Grade λ sind. Sie sind den Ausschlägen u_λ proportional gemäß

$$u_\lambda = u_0 \frac{1}{\prod\limits_{\nu\;1}^{\lambda} \gamma_\nu}\, \alpha_\lambda\,. \tag{15.6}$$

Die Funktionen $\alpha_\lambda(\zeta)$ können mit Hilfe der Rekursionsformel (15.5) genau so aufgebaut werden, wie die Funktionen η_λ mit Hilfe von (11.6) aufgebaut wurden.

Wir zeigen nun noch ganz kurz, wie die reduzierten Ausschlagfunktionen $\alpha(\zeta)$ mit den reduzierten Drillungsfunktionen $\eta(\zeta)$ bzw. mit den diesen proportionalen Frequenzfunktionen $\varphi(\zeta)$ zusammenhängen. Aus der ersten Gleichung (4.6) findet man

$$\Theta_\lambda\, z\, u_\lambda = x_{\lambda+1} - x_\lambda \tag{15.7}$$

und daraus nach Division durch $x_1 = \Theta_0\, u_0\, z$ die Gleichung

$$\frac{\Theta_\lambda}{\Theta_0}\,\frac{u_\lambda}{u_0} - \xi_{\lambda+1} - \xi_\lambda\,.$$

Multiplikation auf beiden Seiten mit

$$\prod_{1}^{\lambda} k_\nu' = \frac{\Theta_0}{\Theta_\lambda} \prod_{1}^{\lambda} k_\nu$$

liefert

$$f_\lambda = g_{\lambda+1} - k_\lambda'\, g_\lambda\,,$$

Division durch k^* schließlich

$$\alpha_\lambda(\zeta) = \eta_{\lambda+1} - \gamma_\lambda'\, \eta_\lambda\,. \tag{15.8}$$

Behandelt man die durch Summierung aus (15.7) entstehenden Gleichungen

$$z \sum_{1}^{\lambda} \Theta_\nu\, u_\nu = x_{\lambda+1}$$

ganz entsprechend, so findet man

$$\frac{\prod\limits_{1}^{\lambda} \gamma_\nu'}{\Theta_0\, u_0} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \Theta_\nu\, u_\nu = \eta_{\lambda+1}\,. \tag{15.9}$$

Will man schließlich noch den Ausdruck (14.1) für die Ersatzmasse durch die reduzierten Dril-

lungsfunktionen η und reduzierten Ausschlagfunktionen α ausdrücken, so findet man mit (15.6) und (15.9)

$$\hat{\Theta} = \frac{\eta_{\lambda+1}}{\alpha_\lambda} \frac{\prod_1^\lambda \gamma_\nu}{\prod_1^\lambda \gamma'_\nu} \Theta_0 = \frac{\eta_{\lambda+1}}{\alpha_\lambda} \Theta_\lambda , \tag{15.10}$$

so daß die z. B. in die Zwei-Massen-Formel (14.2) einzusetzende Funktion $\Theta^*/\hat{\Theta}_1$, wenn $\Theta^* = \Theta_\lambda$ gesetzt wird, lautet

$$\frac{\Theta_\lambda}{\hat{\Theta}} = \frac{\alpha_\lambda(\zeta)}{\eta_{\lambda+1}(\zeta)}$$

oder wegen (15.8)

$$\frac{\Theta_\lambda}{\hat{\Theta}} = \frac{\eta_{\lambda+1}(\zeta) - \gamma'_\lambda \eta_\lambda(\zeta)}{\eta_{\lambda+1}(\zeta)} . \tag{15.11}$$

b) Ausschlagfunktionen der homogenen Maschine. Ebenso wie die Drillungsfunktionen und ihre Verwandten erhalten auch die Ausschlagfunktionen und ihre Umformungen erst dann ihre eigentliche Bedeutung, wenn es sich um homogene Teile eines Schwingers handelt, wo die Massen und Wellenstücke (Federn) jeweils unter sich gleich sind. In diesem Falle werden alle γ und γ' zu Eins (mit Ausnahme jener, die den Index 0 tragen und die verschwinden). Die Rekursionsformel für die reduzierten Ausschlagfunktionen α_λ geht aus (15.5) über in

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\lambda &= (2-\zeta)\, \alpha_{\lambda-1} - \alpha_{\lambda-2} \\ \text{mit} \quad \alpha_0 = 1 \quad &\text{und} \quad \alpha_1 = 1-\zeta . \end{aligned}\right\} \tag{15.12}$$

Ebenso geht (15.8) über in

$$\alpha_\lambda = \eta_{\lambda+1} - \eta_\lambda , \tag{15.13}$$

was wegen (12.2) gleichwertig ist mit

$$\alpha_\lambda = (-1)^\lambda (\varphi_\lambda + \varphi_{\lambda-1}) . \tag{15.13a}$$

Aus (15.13) folgt dann sofort

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} \alpha_\nu = \eta_{\lambda+1} . \tag{15.14}$$

Entweder aus (15.12) aufbauend oder mit Hilfe von (15.13) unmittelbar unter Benutzung der in Abschnitt **12** schon angegebenen Entwicklung der Funktionen $\eta(\zeta)$ bzw. $\varphi(\zeta)$ in Potenzreihen findet man für die Ausschlagfunktionen $\alpha_\lambda(\zeta)$ des homogenen Schwingers die Potenzreihenentwicklung

$$\alpha_\lambda(\zeta) = 1 - \binom{\lambda+1}{2} \zeta + \binom{\lambda+2}{4} \zeta^2 - + \cdots + (-1)^\lambda \zeta^\lambda ,$$

für die man in Summenform schreiben kann

$$\alpha_\lambda(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \binom{\lambda+\nu}{2\nu} \zeta^\nu . \tag{15.15}$$

c) Die Methode der Differenzenrechnung. Wie in Abschnitt **13** können wir nun auch hier die Differenzenrechnung heranziehen, um statt der Potenzreihenentwicklungen trigonometrische Ausdrücke zu gewinnen. Die Rekursionsformel (15.12) läßt sich als Differenzengleichung auffassen. Unter Abänderung des Zählbuchstabens lautet sie

$$\alpha_{\lambda+1}(\zeta) + (\zeta-2)\, \alpha_\lambda(\zeta) + \alpha_{\lambda-1} = 0 . \tag{15.16}$$

Ihre Anfangswerte sind $\alpha_0 = 1$ und $\alpha_1 = (1-\zeta)$. Gleichung (15.16) entspricht der Gleichung (13.1) und ist genau so gebaut wie jene. Sie hat deshalb auch dieselben allgemeinen Lösungen, nämlich

$$\alpha_\lambda = A \cos \alpha\lambda + B \sin \alpha\lambda .$$

Auch der Zusammenhang zwischen dem Parameter α und dem „Frequenzquadrat" ζ wird ebenso wie dort in (13.2) durch

$$\cos \alpha = \frac{2-\zeta}{2} \qquad \text{oder} \qquad \zeta = 2\,(1-\cos \alpha)$$

angegeben. (Man wird den Parameter α nicht mit einer der Ausschlagfunktionen α_i verwechseln!) Die Integrationskonstanten A und B, die den Anfangswerten α_0 und α_1 angepaßt sind, lauten

$$A = 1 \qquad \text{und} \qquad B = \frac{-\zeta/2}{\sin \alpha} = -\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} .$$

So findet man

$$\alpha_\lambda = \cos\alpha\lambda - (1-\cos\alpha)\frac{\sin\alpha\lambda}{\sin\alpha}$$

oder

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\sin\alpha(\lambda+1) - \sin\alpha\lambda\right]$$

oder schließlich

$$\alpha_\lambda(\zeta) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}(2\lambda+1)}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{15.17a}$$

Ersetzt man den Parameter $\alpha/2$ durch α', so kann man auch schreiben

$$\alpha_\lambda(\zeta) = \frac{\cos\alpha'(2\lambda+1)}{\cos\alpha'}. \tag{15.17b}$$

Für die Beziehung des Frequenzparameters α' zur „Frequenz" ζ folgt aus (13.2) nun

$$\sin\alpha' = \frac{\sqrt{\zeta}}{2}. \tag{15.18}$$

Die Summe $\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda}\alpha_\nu$, die wir später in Zusammenhang mit der Summe (14.1) benötigen werden, errechnen wir uns nicht durch Summation der Ausdrücke (15.17), sondern leichter unter Benutzung von (15.14). So kommt mit (13.4)

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda}\alpha_\nu = \frac{\sin\alpha(\lambda+1)}{\sin\alpha} \tag{15.19a}$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda}\alpha_\nu = \frac{\sin 2\alpha'(\lambda+1)}{2\sin\alpha'\cos\alpha'}. \tag{15.19b}$$

d) Die Herstellung der Ersatzmasse, wenn die Zusatzmassen auf derselben Seite des homogenen Kerns liegen. Nunmehr haben wir alle Hilfsmittel in der Hand, um zu zeigen, wie ein Schwinger, der aus einem homogenen Kern und einer oder zwei Zusatzmassen besteht, als Zwei- oder Drei-Massen-System behandelt werden kann.

Im Falle einer Zusatzmasse greift man auf die Zwei-Massen-Formel (14.2), im Falle zweier Zusatzmassen auf die Drei-Massen-Formel (14.3) zurück. In beiden Fällen tritt auf der linken Seite übereinstimmend der Ausdruck $\Theta^*/\hat{\Theta}$ auf. Diese Funktion geht, wenn der homogene Kern aus $(\lambda+1)$ gleichen Massen $\Theta_0 = \cdots = \Theta_\lambda = \Theta$ und λ gleichen Wellenstücken $c_1 = \cdots = c_\lambda = c$ besteht, und wenn man $\Theta^* = \Theta$ und $c^* = c$ setzt, unter Benutzung von (15.11) und nach Einsetzen von (15.17) und (15.19) über in

$$\frac{\Theta}{\hat{\Theta}} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha(\lambda+1)} + \frac{\zeta}{2}. \tag{15.21}$$

Wir wollen diese Funktion $\Theta/\hat{\Theta}$ im Anschluß an *Frank* weiterhin mit $\beta_{\lambda+1}(\zeta)$ bezeichnen. (Der Index $\lambda+1$ gibt die Anzahl der Massen des homogenen Kerns an.) Eine Kurve $\beta_{\lambda+1}(\zeta)$ besteht aus $\lambda+1$ Ästen. Kurvenblätter, die die ersten (höchstens fünf) Äste der Funktion $\beta_{\lambda+1}(\zeta)$ für Maschinen mit $\lambda+1 = 2, 3 \ldots 15$ Massen im Bereich $0 < \zeta < 1{,}1$ (nicht im ganzen in Betracht kommenden Bereich bis $\zeta = 4$) wiedergeben, sind in den Arbeiten von *Frank* [30] und von *Arnold* [33] wiedergegeben. (Leider sind die Funktionen nur durch Kurvenblätter mit ziemlich weitmaschigem Koordinatennetz, nicht auch durch Funktionswerte in Tabellen gegeben.) In der Zwei-Massen-Formel (14.2) besteht die rechte Seite mit $c^* = c$ und $\Theta^* = \Theta$ aus der in ζ linearen Funktion

$$y_1(\zeta) = \frac{c}{c_{\lambda+1}}\zeta - \frac{\Theta}{\Theta_{\lambda+1}}, \tag{15.22}$$

die im y-ζ-Diagramm als Gerade erscheint. In der Drei-Massen-Formel (14.3) besteht sie aus der Funktion zweiten Grades in ζ

$$y_2(\zeta) = \zeta\frac{c}{c_{\lambda+1}} - \frac{\Theta}{\Theta_{\lambda+1}} - \frac{\frac{c_{\lambda+2}}{c}\left(\frac{\Theta}{\Theta_{\lambda+1}}\right)^2}{\zeta - \frac{c_{\lambda+2}}{c}\left(\frac{\Theta}{\Theta_{\lambda+1}} + \frac{\Theta}{\Theta_{\lambda+2}}\right)}; \tag{15.23}$$

sie erscheint als Hyperbel und ist in Abschnitt 14 schon eingehend diskutiert worden.

Die $(\lambda+1)$ Äste der Funktion $\beta_{\lambda+1}(\zeta)$ auf der linken Seite von (14.2) und (14.3) werden von der Geraden $y_1(\zeta)$ in genau $\lambda+1$ Punkten, von der Hyperbel $y_2(\zeta)$ in genau $\lambda+2$ Punkten geschnitten. Die Abszissen ζ_i dieser Schnittpunkte bezeichnen die jeweiligen Eigenfrequenzen.

Zu beiden Fällen, dem homogenen Schwinger mit einer Zusatzmasse und dem homogenen Schwinger mit zwei Zusatzmassen, geben wir nun Beispiele an. Wir wählen dafür jene Schwinger, deren Eigenfrequenzen wie in Abschnitt **12** schon nach der Methode der Frequenzfunktionen ermittelt hatten.

Beispiel 1. Schwinger mit homogenem Kern und einer Zusatzmasse nach Abb. 23. Die Daten des Schwingers findet man auf Seite 24. Die linke Seite von (14.2), die Funktion $\beta_4(\zeta)$, wird gemäß (15.21) wegen $\lambda=3$ zu

$$\beta_4(\zeta) = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha} + \frac{\zeta}{2};$$

hierzu gehört die Bedeutung des Frequenzparameters α nach (13.2). Die rechte Seite von (14.2) lautet gemäß (15.22) mit $c/c_4=2$ und $\Theta/\Theta_4={}^1/_{20}$

$$y_1(\zeta) = 2\,\zeta - 0{,}05\,.$$

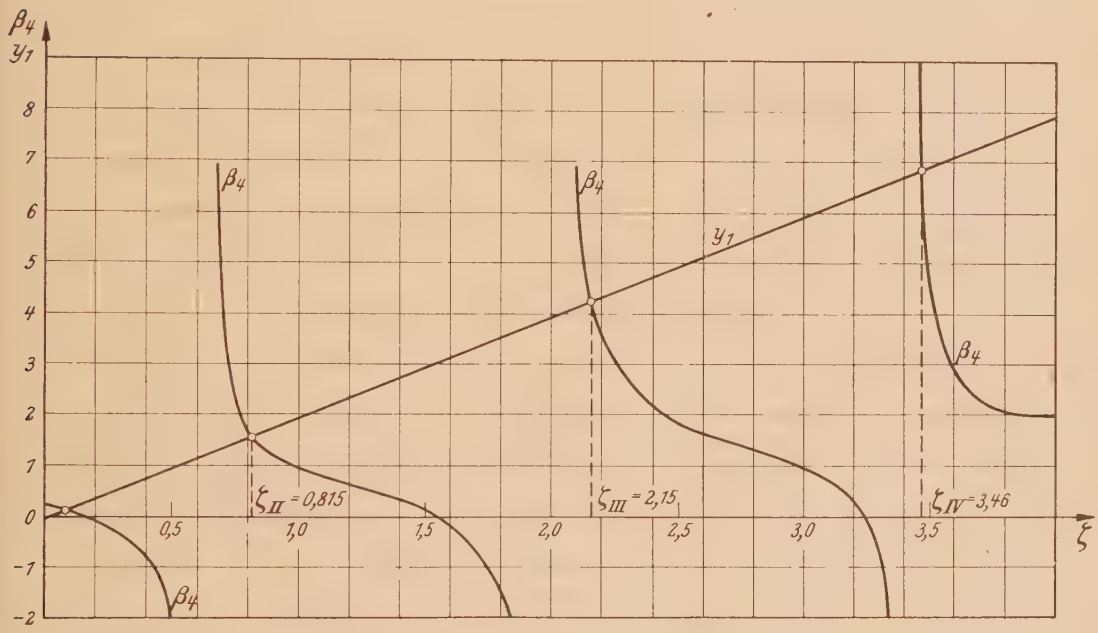


Abb. 36a. Bestimmung der Eigenfrequenzen nach *Frank-Arnold* für die Beispiele der Abb. 23 und 26.

In Abb. 36a sind die beiden Kurven,

$$\beta_4(\zeta) = \frac{1}{2}\,\zeta + \frac{\sin 2\alpha'}{\operatorname{tg} 8\alpha'}$$

und

$$y_1(\zeta) = -0{,}05 + 2\,\zeta,$$

aufgezeichnet und zum Schnitt gebracht. Die vier Schnittpunkte haben die Abszissen

$$\zeta_I = 0{,}100, \quad \zeta_{II} = 0{,}815, \quad \zeta_{III} = 2{,}15, \quad \zeta_{IV} = 3{,}46.$$

Man erkennt, daß diese Werte so gut mit den entsprechenden desselben Beispiels in Abschnitt **12** übereinstimmen, wie dies mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Aufzeichnungen erwartet werden kann.

Beispiel 2. Schwinger mit homogenem Kern und zwei Zusatzmassen (Abb. 26). Für die Lösung kann Abb. 36a mit verwendet werden. An Stelle der Geraden

$$y_1 = -0{,}05 + 2\,\zeta,$$

die mit den Ästen der Kurve β_4 zum Schnitt gebracht werden muß, wenn eine Zusatzmasse vorhanden ist, tritt nun bei Anwesenheit zweier Zusatzmassen die Hyperbel

$$y_2 = -0{,}05 + 2\,\zeta - \frac{0{,}000\,781}{\zeta - 0{,}02\,604}\,.$$

Da die lotrechte Asymptote dieser Hyperbel die ζ-Achse schon bei 0,026 schneidet, kann der erste Ast der Hyperbel in Abb. 36a kaum erscheinen; der zweite Ast unterscheidet sich für alle interessierenden Abszissenwerte ζ nicht mehr von der Geraden. Die Hyperbel ist deshalb über-

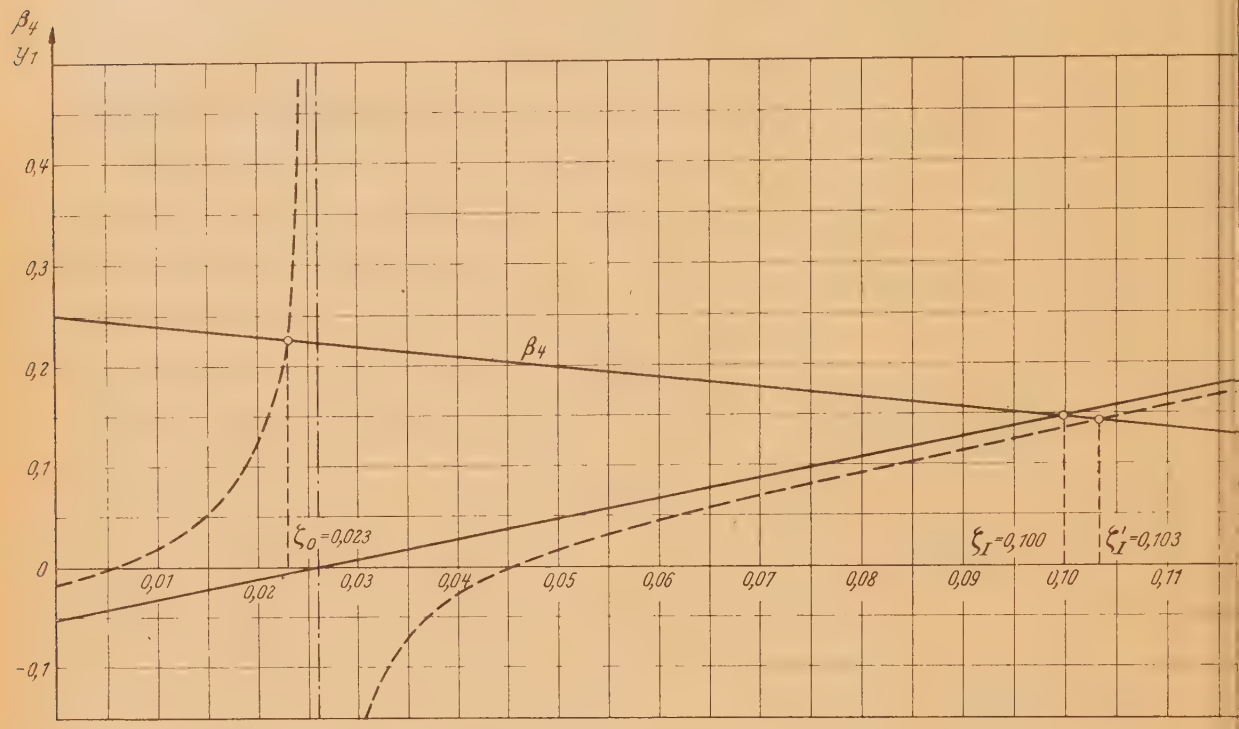


Abb. 36b. Ausschnitt aus Abb. 36a.

haupt nur in der Ergänzungsabbildung 36b eingetragen. Die Abszisse ζ_0' des ersten Schnittpunktes zwischen Hyperbel und β_4-Kurve ist

$$\zeta_0' = 0{,}023\,.$$

Die des zweiten Schnittpunktes,

$$\zeta_I' = 0{,}103\,,$$

unterscheidet sich nur wenig vom Wert ζ_I des vorigen Beispieles. Die höheren Schnittpunkte sind praktisch unverändert, da die Hyperbel für die höheren Werte ζ sich kaum mehr von ihrer Asymptote unterscheidet.

e) Die Zusatzmassen liegen auf verschiedenen Seiten des homogenen Kerns. Auch der kompliziertere, aber praktisch nicht seltene Fall, daß die Zusatzmassen auf verschiedenen Seiten des homogenen Kerns liegen, läßt sich mit den hier entwickelten Methoden behandeln. Die dafür notwendigen Überlegungen sowie die zur Durchführung dann notwendigen Schritte sind jedoch etwas umständlicher als beim Verfahren, das wir in Abschnitt 12 zur Lösung derselben Aufgabe beschrieben haben.

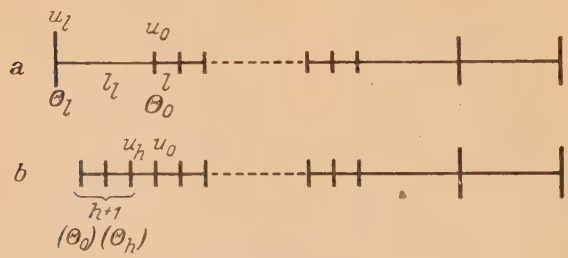


Abb. 37. Schwinger mit Zusatzmassen auf verschiedenen Seiten.

Wir stellen uns etwa einen Schwinger nach Abb. 37a vor, der rechts vom homogenen Kern eine beliebige Anzahl von Zusatzmassen, dazu links noch eine weitere Zusatzmasse aufweisen möge. Ein solches Gebilde wird der Behandlung mit den beschriebenen Mitteln (Gedanke der Ersatzmasse, Benutzung der β-Kurvenblätter) dadurch zugänglich gemacht, daß die eine, links angebrachte Drehmasse Θ_l und das Wellenstück c_l ersetzt werden durch eine Reihe von Massen Θ und Wellenstücken c, wie sie der homogene Kern des Motors aufweist, so daß ein Gebilde nach Abb. 37b

zustande kommt; dieses kann dann in der schon beschriebenen Weise mit den „rechten" Zusatzmassen zusammengefaßt werden.

Die Reduktion der Masse Θ_l auf die Stelle der Masse Θ_0 liefert aus

$$x = z\,\Theta_l\,u_l \quad \text{und} \quad x = z\,\hat{\Theta}_l\,u_0$$

für den Kehrwert der Ersatzmasse $\hat{\Theta}_l$ die Beziehung

$$\frac{1}{\hat{\Theta}_l} = \frac{1}{\Theta_l}\,\frac{u_0}{u_l}\,.$$

Wegen $x = c_l\,(u_l - u_0)$ wird daraus

$$\frac{1}{\hat{\Theta}_l} = \frac{1}{\Theta_l}\left(1 - z\,\frac{\Theta_l}{c_l}\right). \tag{15.24}$$

Denkt man sich andererseits die $h+1$ (zusätzlichen) Massen (Θ_0) bis (Θ_h), die alle gleich Θ sein und an die Stelle der Masse Θ_l treten sollen, zunächst auf die Stelle der Masse (Θ_h) reduziert, so gilt die Definitionsgleichung

$$\frac{1}{\hat{\Theta}} = \frac{1}{\Theta}\,\beta_{h+1};$$

bei Reduktion auf die Stelle der Masse Θ_0 kommt dann

$$\frac{1}{\hat{\Theta}_l} = \frac{1}{\Theta}\,\beta_{h+1}\,\frac{u_0}{u_{(h)}}\,.$$

Wegen

$$\hat{\Theta}\,u_{(h)}\,z = \frac{\Theta}{\beta_{h+1}}\,u_{(h)}\,z = c\,(u_{(h)} - u_0)$$

folgt daraus

$$\left(\frac{u_0}{u_{(h)}}\right)\beta_{h+1} = \beta_{h+1} - z\,\frac{\Theta}{c} = \beta_{h+1} - \zeta;$$

also wird der Kehrwert der gesuchten Ersatzmasse zu

$$\frac{1}{\hat{\Theta}_l} = \frac{1}{\Theta}\left(\beta_{h+1} - z\,\frac{\Theta}{c}\right). \tag{15.25}$$

Gleichsetzung von $1/\hat{\Theta}_l$ nach (15.24) und $1/\hat{\Theta}_l$ nach (15.25), liefert schließlich

$$\beta_{h+1} = \frac{\Theta}{\Theta_l} + \zeta\left(1 - \frac{c}{c_l}\right). \tag{15.26}$$

Das heißt aber: Durch Schneiden der Kurvenscharen β mit der Geraden, die die rechte Seite von (15.26) darstellt, findet man den Index $h+1$, das ist die Gesamtzahl der „homogenen" Massen (Θ_0) bis (Θ_h), die die „linke" Zusatzmasse Θ_l gleichwertig ersetzen. Diese Zahl $h+1$ ist eine Funktion von ζ. Um diese frequenzabhängige Zahl $h+1$ ist der Index $\lambda+1$ jener β-Kurve zu erhöhen, die bei Abwesenheit der linken Zusatzmasse zur Feststellung der Eigenfrequenz des aus homogenem Kern mit der rechten Zusatzmasse bestehenden Schwingers verwendet worden wäre. Mit anderen Worten: Die β-Kurve des „neuen", homogenen, aus $\lambda+h+2$-Massen bestehenden Kerns (wir wollen sie als β'-Kurve bezeichnen) findet man auf folgende Weise (vgl. Abb. 38, wo $\lambda+1=4$ angenommen ist): Mit der Geraden, die die rechte Seite von (15.26) angibt,

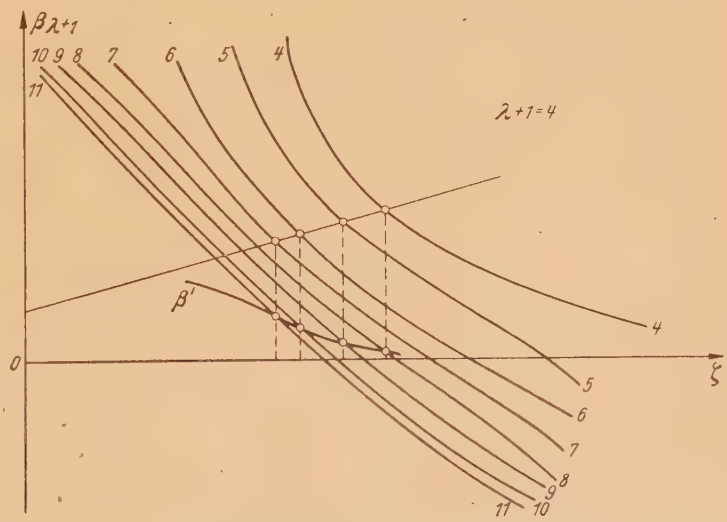


Abb. 38. Herstellung der β'-Kurven.

$$y = \frac{\Theta}{\Theta_l} + \zeta\left(1 - \frac{c}{c_l}\right), \tag{15.26a}$$

schneidet man die Schar der β-Kurven. Der Index der jeweils geschnittenen Kurve gibt (als Funktion von ζ) eine Zahl $h+1$. Diese Zahl wird um $\lambda+1$ (in unserem Beispiel also um 4) vermehrt, und es wird (zu jeweils der gleichen Frequenz z bzw. ζ) der Funktionswert $\beta_{h+\lambda+2}$ aufgesucht und markiert. Die Folge der so erhaltenen Funktionswerte ergibt die Kurve $\beta'(\zeta)$. Sie stellt die β-Kurve des „neuen" homogenen Kerns dar und wird für das weitere genau so verwendet wie früher die β-Kurve selbst.

Besonders vermerkt sei noch, daß (wie man sich leicht überlegt) für $\zeta=0$ die Funktion β' den Wert

$$\beta' = \frac{1}{\lambda+1+\frac{\Theta_l}{\Theta}}$$

annimmt.

Abb. 39. Zwei Zusatzmassen auf der linken Seite.

Ohne auf die Herleitung einzugehen, die den gleichen Gedankengängen folgt, schreiben wir noch an, wie die der Gleichung (15.26) entsprechende Gleichung lautet, wenn links zwei Massen Θ_m und Θ_l (nach Abb. 39) an den Wellenstücken c_m und c_l vorhanden sind. Es wird dann

$$\beta_{h+1} = \left(1-\frac{c}{c_l}\right)\zeta + \frac{\Theta}{\Theta_l} + \frac{\frac{c_m}{c}\,\frac{\Theta^2}{\Theta_l^2}}{\zeta - \frac{c_m}{c}\,\frac{\Theta(\Theta_l+\Theta_m)}{\Theta_l\Theta_m}}\,. \tag{15.27}$$

Ihre Anwendung ist nach allem Gesagten ebenfalls klar: Statt mit der Geraden (15.26a) wird die Schar der Kurven β jetzt mit der Hyperbel geschnitten, die die rechte Seite von (15.27) darstellt. Sie ist wieder von der Bauart

$$y = A\,\zeta + B + \frac{C}{\zeta - D}\,.$$

Ihre Asymptoten, Nullwerte usw. können also nach den früher gegebenen Anweisungen gefunden werden. Aus den Schnittpunkten dieser Hyperbel mit den Kurvenästen $\beta(\zeta)$ findet man jetzt den Index $h+1$; er wird um $\lambda+1$ erhöht und für denselben Wert ζ der neue Funktionswert $\beta'=\beta_{h+\lambda+2}$ aufgesucht. So entsteht punktweise die Kurve $\beta'(\zeta)$, die jetzt dem neuen homogenen Kern zukommt. Jetzt kommt für $\zeta=0$ der Wert

$$\beta' = \frac{1}{\lambda+1+\frac{\Theta_l+\Theta_m}{\Theta}}$$

zustande.

Sind dem homogenen Kern mehr als zwei Massen vorgeschaltet, so sucht man nach bekannten Methoden (etwa nach dem *Gümbel-Tolle*schen Verfahren) die Ersatzmasse $\hat{\Theta}$ usw. auf, die an der Stelle der Masse Θ_0 anzubringen wäre. Aus (15.25) folgt dann

$$\beta_{h+1} = \frac{\Theta}{\hat{\Theta}(\zeta)} + \zeta\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nun nicht mehr eine lineare, wohl aber eine bekannte Funktion. Die sie darstellende Kurve ist jetzt mit der Schar der β-Kurven zu schneiden. Alles weitere verläuft wie zuvor.

Eine Bemerkung verdient noch der Umstand, daß der Index $h+1$, das ist also die Anzahl der homogenen Ersatzmassen nur für ausgezeichnete Werte von ζ eine ganze Zahl ist, eben für jene Werte ζ, die zu Schnittpunkten der Kurvenscharen $\beta(\zeta)$ mit den Kurven

$$y = \frac{\Theta}{\hat{\Theta}(\zeta)} + \zeta$$

(Geraden, Hyperbel usw.) gehören. Zu den übrigen Werten ζ gehören nicht ganzzahlige Werte h bzw. $h+1$. Da die Funktionen $\beta(\zeta)$ nicht nur für ganze Werte ihrer Indizes, sondern [etwa durch (15.21)] für alle Werte des Index definiert sind, ist das Verfahren ohne Schwierigkeiten durchführbar. Die zugrunde liegenden Vorstellungen über den „ersetzenden homogenen" Teil des Schwingers liefern zunächst allerdings nur diskrete Werte der Funktion $\beta'(\zeta)$. Vermöge der Forderung nach der „Permanenz der formalen Gesetze" wird aus den diskreten Werten eine stetige Funktion $\beta'(\zeta)$ hergestellt. Ihr gehört dann auch eine stetige Folge von „Indizes" $h+1$ zu.

16. Das Iterationsverfahren nach *C. B. Biezeno* und *R. Grammel* [29] zur Ermittelung der niedrigsten Eigenfrequenz. Die Aufgabe, die Eigenfrequenzen des in Rede stehenden Torsionsschwingers zu ermitteln, ist, wie wir in Abschnitt **4** schon aussprachen, ein Eigenwertproblem. Die algebraisch am nächsten liegende Methode zur Aufsuchung von Eigenwerten besteht in der Aufstellung der charakteristischen Gleichung des Problems (hier „Frequenzengleichung") und der Lösung dieser algebraischen Gleichung. Aus Gründen der praktischen Zweckmäßigkeit ersetzt man dieses Vorgehen jedoch in der Regel durch eines der in den Abschnitten **10** bis **15** beschriebenen Verfahren. Alle diese Verfahren beruhen im wesentlichen auf dem Gedanken, das Gleichungssystem (4.4) oder (11.1) dadurch zu lösen, daß für den Eigenwert z eine Annahme getroffen und das Erfülltsein der letzten Gleichung nachgeprüft wird. Neben diesen, unter sich eng verwandten Verfahren gibt es nun noch ein anderes, von ihnen grundsätzlich verschiedenes Verfahren, um ein Eigenwertproblem zu lösen: die Iteration.

Das vorgelegte algebraische Gleichungssystem habe die Gestalt

$$y_\lambda = z\,[\alpha_{\lambda 1}\, m_1\, y_1 + \alpha_{\lambda 2}\, m_2\, y_2 + \cdots + \alpha_{\lambda n}\, m_n\, y_n] \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n) \tag{16.1}$$

(z bezeichne darin den Eigenwert). Der Grundgedanke des Iterationsverfahrens besteht nun darin, einen Satz beliebiger, aber zweckmäßig gewählter Werte $y_{01}, y_{02} \ldots y_{0n}$ vorzugeben und sie auf der rechten Seite der Gleichung

$$y_\lambda = \alpha_{\lambda 1}\, m_1\, y_1 + \cdots + \alpha_{\lambda n}\, m_n\, y_n \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n) \tag{16.2}$$

einzusetzen, aus ihnen also einen zweiten Satz von Werten, $y_{11}, y_{12} \ldots, y_{1n}$, zu ermitteln. Es läßt sich nämlich zeigen, daß für den niedrigsten Eigenwert z_1 die obere Schranke

$$z_1 < \frac{\sum\limits_{\varkappa=0}^{n} m_\varkappa\, y_{0\varkappa}\, y_{1\varkappa}}{\sum\limits_{\varkappa=0}^{n} m_\varkappa\, y_{1\varkappa}^2} \tag{16.3a}$$

besteht, und daß sie überdies den Eigenwert schon recht gut annähert[1]. Genügt die Annäherung den Ansprüchen an die Genauigkeit noch nicht, so kann man durch eine Wiederholung des Verfahrens aus den Werten $y_{1\lambda}$ Werte $y_{2\lambda}$ herstellen; sie liefern dann in

$$z_1 < \frac{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} m_\varkappa\, y_{1\varkappa}\, y_{2\varkappa}}{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} m_\varkappa\, y_{2\varkappa}^2} \tag{16.3b}$$

eine niedrigere obere Schranke, also eine bessere Annäherung an den ersten Eigenwert.

Die höheren Eigenwerte erhält man allerdings nicht mehr so einfach. Wir beschränken unsere Darstellung deshalb auf die Ermittelung des ersten Eigenwertes und verweisen im übrigen auf die angeführte Quelle.

Um das soeben beschriebene Verfahren in unserem Fall durchzuführen, gehen wir aus von den in den Drillungsmomenten geschriebenen Gleichungen (11.1a). Mit den Abkürzungen

$$a_{\lambda+1,\lambda} = a_{\lambda,\lambda+1} = -\frac{1}{\Theta_\lambda}, \qquad a_{\lambda\lambda} = \left(\frac{1}{\Theta_{\lambda-1}} + \frac{1}{\Theta_\lambda}\right), \qquad b_\lambda = \frac{1}{c_\lambda} = \frac{l_\lambda}{G\,J_p}$$

und unter Beachtung von $x_0 = x_{n+1} = 0$ lauten sie

$$a_{\lambda,\lambda-1}\, x_{\lambda-1} + a_{\lambda\lambda}\, x_\lambda + a_{\lambda,\lambda+1}\, x_{\lambda+1} = b_\lambda\, x_\lambda\, z \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n) \tag{16.4}$$

oder ausgeschrieben

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 & = b_1\, x_1\, z\,, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 & = b_2\, x_2\, z\,, \\ \quad a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4 & = b_3\, x_3\, z\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \quad a_{n,n-1}\, x_{n-1} + a_{nn}\, x_n & = b_n\, x_n\, z\,. \end{array}\right\} \tag{16.4a}$$

In dieser Gestalt eignen sie sich jedoch nicht zur Durchführung des Iterationsverfahrens, wenn der niedrigste Eigenwert aufgesucht werden soll. Wir müssen die Gleichungen vielmehr nach den rechten Seiten auflösen[2]. So kommt, wenn

$$t_{ij} = \frac{\sum\limits_{\varkappa=0}^{i-1} \Theta_\varkappa \sum\limits_{\varkappa=j}^{n} \Theta_\varkappa}{\sum\limits_{\varkappa=0}^{n} \Theta_\varkappa} \quad \text{für } i \leqq j \tag{16.5}$$

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 155. Berlin 1939.
[2] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 1047.

bezeichnet und $t_{ij}=t_{ji}$ sei, das Gleichungssystem

$$x_1 = z\,(b_1\,t_{\lambda 1}\,x_1 + b_2\,t_{\lambda 2}\,x_2 + \cdots + b_n\,t_{\lambda n}\,x_n) \qquad (\lambda=1,2\ldots n) \tag{16.6}$$

zustande. Es hat nun tatsächlich die Gestalt des Systems (16.1) und geht mit

$$x_\lambda = y_\lambda\,, \qquad b_\varkappa = m_\varkappa\,, \qquad t_{\lambda\varkappa} = \alpha_{\lambda\varkappa}$$

in dieses über.

Man stellt nun also aus einem Satz von Werten $x_{0\lambda}$ gemäß (16.2) einen Satz von Werten $x_{1\lambda}$ her, und notfalls einen zweiten, $x_{2\lambda}$, und erhält dann mit Hilfe von (16.3a) oder (16.3b) eine obere Schranke und damit einen Näherungswert für den niedrigsten Eigenwert.

An der angeführten Stelle wird noch gezeigt, wie die Auflösung der Gleichungen (16.4a) nach den rechten Seiten und somit die Herstellung der Koeffizienten t_{ij}, die bei sehr vielen Freiheitsgraden mühsam wird, umgangen werden kann dadurch, daß man dem Gleichungssystem (16.6) eine andere Deutung gibt. Wir verzichten hier auf die Wiedergabe dieses zweiten Weges und verweisen auch dieserhalb auf die angeführte Quelle.

Beispiel. Wir erläutern das Verfahren an jenem Beispiel, das wir in Abschnitt **10** (Abb.14) und **11** schon gewählt hatten, und das wir noch vielfach heranziehen werden (vgl. Abschnitt **23**). Es stellt ein Vier-Massen-System dar mit den

Trägheitsmomenten	reduzierten Längen	
$\Theta_0=0{,}36$ cm kg sec²	$l_1=100$ cm	auf $C=G\,J_p=10^6\,\mathrm{cm^2\,kg}$ bezogen.
$\Theta_1=0{,}15$ cm kg sec²	$l_2=\ 30$ cm	
$\Theta_2=0{,}21$ cm kg sec²	$l_3=\ 70$ cm	
$\Theta_3=0{,}09$ cm kg sec²		

Die gemäß (16.5) errechneten Koeffizienten t_{ij} haben die Werte

$$t_{11} = 20\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm\,kg\,sec^2}\,, \qquad t_{22} = \tfrac{170}{9}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm\,kg\,sec^2}\,,$$
$$t_{12} = \tfrac{40}{3}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm\,kg\,sec^2}\,, \qquad t_{23} = \tfrac{17}{3}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm\,kg\,sec^2}\,,$$
$$t_{13} = 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm\,kg\,sec^2}\,, \qquad t_{33} = 8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm\,kg\,sec^2}\,,$$

die b_λ werden zu

$$b_1 = 1\ \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg^{-1}\,cm^{-1}}\,,$$
$$b_2 = 0{,}3\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg^{-1}\,cm^{-1}}\,,$$
$$b_3 = 0{,}7\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg^{-1}\,cm^{-1}}\,.$$

Das dem ersten Iterationsschritt zugrunde liegende Gleichungssystem lautet demgemäß

$$x_{11} = (2000\,x_{01} + 400\,x_{02} + 280\,x_{03})\cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec^2}\,,$$
$$x_{12} = (1333\,x_{01} + 567\,x_{02} + 397\,x_{03})\cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec^2}\,,$$
$$x_{13} = (400\,x_{01} + 170\,x_{02} + 560\,x_{03})\cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec^2}\,.$$

Würde man, mangels besserer Vorschätzung, damit beginnen, die Werte $x_{0\lambda}$ des nullten Satzes jeweils gleich Eins zu setzen, so erhielte man als Werte des ersten Satzes die Summe der Koeffizienten in den Zeilen. Diese Summen verhalten sich ungefähr wie 3:2:1. Wir beginnen deshalb sogleich mit einem Satz von Nullwerten

$$x_{01} = 3\,\alpha\,, \qquad x_{02} = 2\,\alpha\,, \qquad x_{03} = \alpha$$

und finden daraus

$$x_{11} = 7080\,\alpha\cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec^2}\,,$$
$$x_{12} = 5531\,\alpha\cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec^2}\,,$$
$$x_{13} = 2100\,\alpha\cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec^2}\,.$$

Die in (16.3a) einzusetzenden Werte findet man aus der nachstehenden Tabelle

	$x_{0\lambda}\,x_{1\lambda}$	$b_\lambda\,x_{0\lambda}\,x_{1\lambda}$	$x_{1\lambda}^2$	$b_\lambda\cdot x_{1\lambda}^2$
	$\alpha^2\cdot 10^{-8}$ sec²	$\alpha^2\cdot 10^{-12}$ sec²/cm kg	$\alpha^2\cdot 10^{-12}$ sec⁴	$\alpha^2\cdot 10^{-16}$ sec⁴/cm kg
$\lambda=1$	21 240	21 240	5 012	5 012
$\lambda=2$	11 062	3 318	3 058	918
$\lambda=3$	2 100	1 470	441	309
$\sum$		26 028		6 239

Daraus folgt der Näherungswert

$$z = \frac{26\,028}{6\,239} \cdot 10^4 \sec^{-2} = 4{,}17 \cdot 10^4 \sec^{-2}$$

$$\text{oder } \omega = \sqrt{z} = 204{,}3 \sec^{-1}.$$

Die Annäherung ist nach Ausführung des ersten Schrittes schon bemerkenswert gut, wie man durch einen Vergleich mit den Ergebnissen in den Abschnitten **10**, **11**, und **23** feststellt.

C. Die auf der „Aufteilung" beruhenden Verfahren.

I. Zeichnerische Verfahren, die vom „Seileck" Gebrauch machen.

17. Das Verfahren nach *E. Rausch* [14]. In Abschnitt **3** hatten wir schon erwähnt, daß alle Verfahren zur Aufsuchung der Eigenfrequenzen eines Schwingers nach Abb. 1 sich in zwei große Klassen einteilen lassen, in jene Verfahren nämlich, die an die Gleichungen (4.4) oder (4.6) anschließen (sie wurden im Teil **B** in den Abschnitten **10** bis **15** ausführlich erörtert) und in jene, die von dem Gedanken der Aufspaltung Gebrauch machen, wie er in Abschnitt **5** dargelegt ist. Dieser zweiten Klasse wenden wir uns nunmehr in diesem Teil des Berichtes zu. Auch hier legen wir Wert darauf, den inneren Zusammenhang der Verfahren untereinander herauszuarbeiten. Unsere Darlegungen, und damit auch die Reihenfolge, in der wir die einzelnen Verfahren vorführen, werden allein von diesem Ziel, nicht von der historischen Aufeinanderfolge bestimmt. Das Verfahren, das den Gedanken der Aufspaltung am übersichtlichsten verwertet, ist das von *E. Rausch* [14] angegebene. Wir stellen es deshalb an die Spitze.

Das Verfahren von *Rausch* benutzt die Zerlegung des Schwingers in Ein-Massen-Systeme, wie sie in Abb. 5 dargestellt ist. Für diese Ein-Massen-Systeme wird nun die Forderung erhoben, alle ihre Eigenfrequenzen sollen übereinstimmen. Demnach muß gemäß der „Ein-Massen-Formel"

$$\omega^2 = \frac{G J_p}{l \Theta} \tag{17.1}$$

gelten

$$l_{10}\,\Theta_0 = l_{11}\,\Theta_{11} = l_{21}\,\Theta_{12} = \cdots = l_{\lambda,\lambda-1}\,\Theta_{\lambda-1,\lambda} = l_{\lambda\lambda}\,\Theta_{\lambda\lambda} = \cdots = l_{nn}\,\Theta_n\,. \tag{17.2}$$

(Die Abkürzungen l_{ik} und Θ_{ik} sind in Abschnitt **5** erklärt und aus Abb. 5 und 6 ersichtlich.) Die in (17.2) auftretenden Ausdrücke $l\,\Theta$ sind nun von der Bauart der ersten Gleichung (8.1). Sie lassen sich also mit Hilfe des Seileckes herstellen. Abb. 40 zeigt der Übersichtlichkeit wegen das Vorgehen zunächst an einem Zwei-Massen-System (wo man dieses Verfahren allerdings noch nicht nötig hätte). Abb. 40a gibt die Anordnung, 40c das mit Hilfe der Abb. 40b gewonnene „Seileck". Die Ordinaten η_1 und η_2 sind jeweils ein Maß für die Produkte $\Theta_0\,x_1$ und $\Theta_1\,x_2$. Da $\Theta_0\,x_1 = \Theta_1\,x_2$ gemacht werden soll, so müssen die Ordinaten η_1 und η_2 einander gleich werden. Die im Schnittpunkt A_1 auftretende Ordinate η gehört zu beiden Dreiecken, gibt also den Wert $\eta = \eta_1 = \eta_2$. Ihre Lage gibt die Größen $x_1 = l_{10}$, $x_2 = l_{11}$, also die Lage des Knotenpunktes K an. Aber auch die Frequenz selbst ist auf diese Weise schon ermittelt. Da η die Produkte $\Theta_0\,l_{10}$ oder $\Theta_1\,l_{11}$ darstellt, so gilt wegen (17.1)

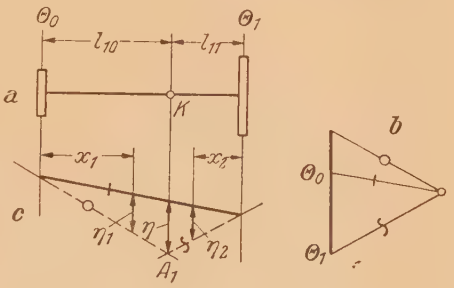


Abb. 40. Zwei-Massen-System.

$$\omega^2 = \frac{G J_p}{\eta} \qquad \text{oder} \qquad \eta = \frac{1}{\omega^2}\,G J_p\,.$$

Die Strecke η ist also ein Maß für den Kehrwert des Frequenzquadrates. Die Maßstäbe erhält man gemäß (8.2) zu

$$m_\eta = m_l\, m_\Theta\, H$$

und daher

$$m_{\left(\frac{1}{\omega^2}\right)} = m_l\, m_\Theta\, \frac{H}{G J_p}\,. \tag{17.3}$$

Für ein Drei-Massen-System gestaltet sich das Vorgehen so, wie Abb. 41 angibt. Abb. 41a zeigt die Anordnung; die ausgezogenen Linien in Abb. 41c folgen aus Abb. 41b; sie sind die Parallelen zu den dort ebenfalls ausgezogenen Linien. Die gesuchten Ein-Massen-Systeme entstehen durch Aufteilung der mittleren Masse Θ_1. Irgendeiner Aufteilung der Masse Θ_1 entspricht in Abb. 41b ein Strahl PE'_{II}. Seine Parallele in Abb. 41c liefert zwei Schnittpunkte A'_1 und A'_2. Die (probeweise) vorgenommene Aufteilung ist dann die richtige (strichpunktiert), wenn die Ordinaten η_1 und η_2 in A_1 und A_2 einander gleich sind. Man geht also zweckmäßig so vor, daß man um D_1 in Abb. 41c eine Gerade so lange dreht, bis die Ordinaten in den Schnittpunkten A_1 und A_2 einander gleich geworden sind. Die Parallele zu dieser Geraden schneidet dann in Abb. 41b vermittelst des Punktes E_{II} auf der Θ_1 darstellenden Strecke die Teilmassen Θ_{11} und Θ_{12} ab. Zugleich liefert die Lage von A_1 in Abb. 41c die Teillängen l_{10} und l_{11}, die Lage von A_2 die Teillängen l_{21} und l_{22}. Für die Maßstäbe gilt wieder Gleichung (17.3). Damit ist die Aufgabe gelöst, d. h. es ist eine, und zwar die höchste, Eigenfrequenz samt den zugehörigen (reellen) Knotenpunkten (also auch das „Ausschlagbild") gefunden.

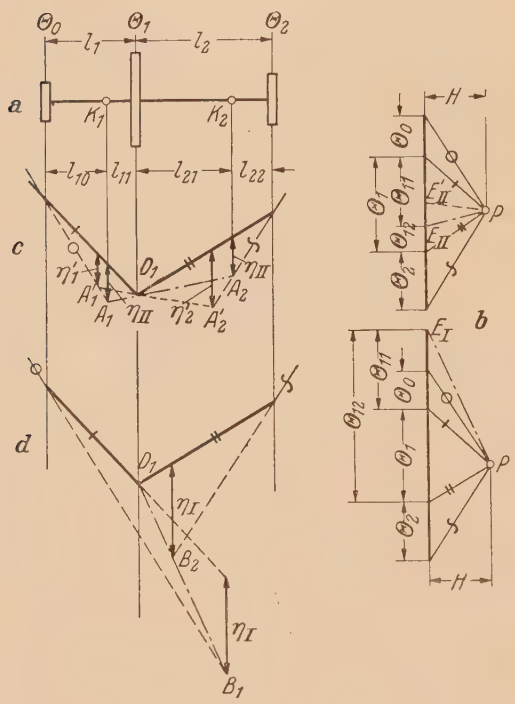


Abb. 41. Drei-Massen-System.

Außer der so ermittelten Schwingungsform mit lauter reellen Knotenpunkten gibt es noch eine zweite, bei der ein Knoten virtuell ist. Wie in Abschnitt **5** ausgeführt wurde, besagt das, daß die Aufteilung der Längen und Massen nicht nur in positive Stücke, die kleiner sind als die aufzuteilenden, erfolgt, daß vielmehr auch negative Teilstücke und solche, die größer sind als das Ausgangsstück, auftreten. Demnach muß es außer der Geraden $A_1D_1A_2$ in Abb. 41c noch eine zweite Gerade geben (deren Parallele in Abb. 41b die Strecke Θ_1 dann „außen" teilt), die ebenfalls gleiche Ordinaten η abschneidet. Die neuen Schnittpunkte B_1 und B_2, mit den „äußeren" Seilstrahlen, werden dann eine der Längen l_1 und l_2 ebenfalls „außen" teilen, so daß ein virtueller Knoten entsteht. Abb. 41d zeigt die Lage dieser neuen Geraden $B_1B_2D_1$. Im zweiten Teil der Abb. 41 ist ihre Parallele PE_I eingezeichnet; sie teilt die Strecke Θ_1 außen. Durch B_1 wird auch l_1 außen geteilt. Die Ordinate η_I ist nun ein Maß für den Kehrwert $1/\omega_I^2$. Der Maßstab ist wieder durch (17.3) bestimmt.

Was hier für ein Zwei- und ein Drei-Massen-System ausführlich erörtert wurde, läßt sich auch bei Systemen mit mehr Massen sinngemäß durchführen. Handelt es sich etwa um ein Vier-Massen-System, so hat man (Abb. 42) durch die beiden Punkte D_1 und D_2 jeweils eine Gerade zu legen und muß diese Geraden so lange drehen, bis die drei Ordinaten in den Schnittpunkten A_1, A_2 und A_3 einander gleich geworden sind. Hier kann man jeweils drei Lagen für die beiden Geraden durch D_1 und D_2 finden, die gleiche Ordinaten η abschneiden. Diese drei verschiedenen Lagen entsprechen den drei Eigenschwingungsformen, die Ordinaten sind ein Maß für die drei Eigenschwingzahlen. Im übrigen sprechen die Abbildungen für sich selbst. (Die Aufteilung der Massen Θ in Abb. 42b gehört zur Schwingung dritten Grades nach Abb. 42c mit reellen Knoten.)

Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß auch ein Schwinger, der an einem oder an beiden Enden festgehalten ist, nach dem gleichen Verfahren behandelt werden kann. Ein festgehaltenes Ende entspricht dem Vorhandensein einer unendlich großen Masse. Der entsprechende Seilstrahl läuft dann von P aus parallel den Strecken Θ, die Ordinate η wird demgemäß nicht „im" Feld, sondern am Ende des Feldes abgeschnitten, der Knoten rückt nach dem Festpunkt. Im übrigen verläuft alles sinngemäß. In Abb. 43 ist ein Beispiel für einen Schwinger mit zwei festgehaltenen Enden und drei „inneren" Massen Θ_1, Θ_2, Θ_3 durchgeführt.

Besondere Betonung verdient die Tatsache, daß das dargestellte Verfahren (natürlich innerhalb der Genauigkeit der zeichnerischen Ausführung) die streng richtigen Werte aller Eigenfrequenzen liefert, da es auf wirklich geltenden Gleichungen, nämlich (17.2) aufgebaut ist. Es ist kein Näherungsverfahren.

Wegen eines Zahlenbeispiels sei auf Abschnitt **23** verwiesen, wo die Eigenschwingzahlen ein und desselben Schwingers nach verschiedenen Verfahren, darunter auch dem nach *Rausch*, ermittelt werden.

18. Das Verfahren nach *K. Kutzbach* [3]. Der *Kutzbach*sche Originalaufsatz ist recht schwer lesbar, da in ihm eine Reihe ziemlich heterogener Gedankengänge und Zielsetzungen durcheinander laufen. Der darin enthaltene Vorschlag zur Auffindung der Eigenfrequenzen eines Schwingers läßt sich am besten durch einen Vergleich mit dem schon beschriebenen Verfahren nach *Rausch* erläutern. Das *Rausch*sche Verfahren ist streng richtig, das *Kutzbach*sche nur insoweit, als es mit jenem übereinstimmt; wo es abweicht, liefert es keine genauen, sondern nur Näherungswerte. Diese können sich unter Umständen, wie ein Beispiel zeigen wird, beträchtlich von den genauen unterscheiden. Etwas gemildert wird dieser Umstand jedoch dadurch, daß, wie wir ebenfalls zeigen

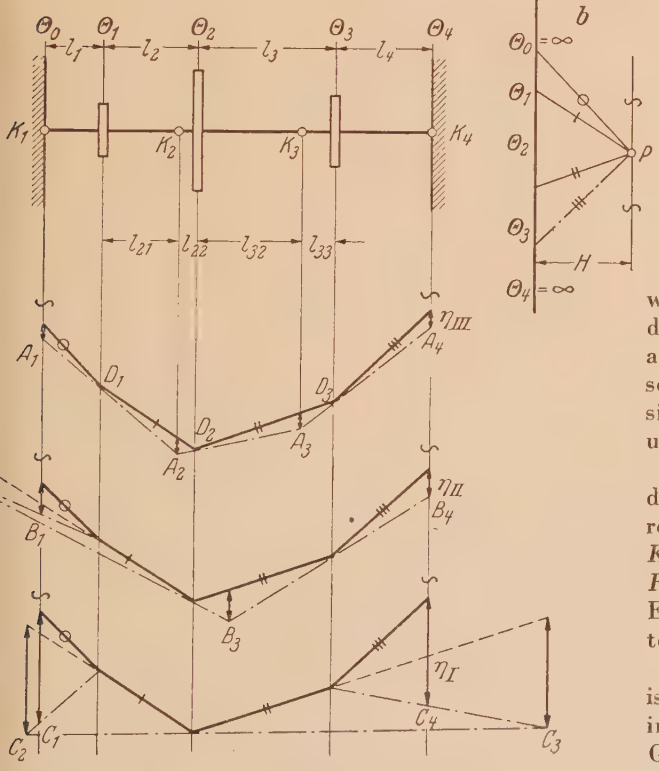


Abb. 43. Drei-Massen-System mit Festpunkten.

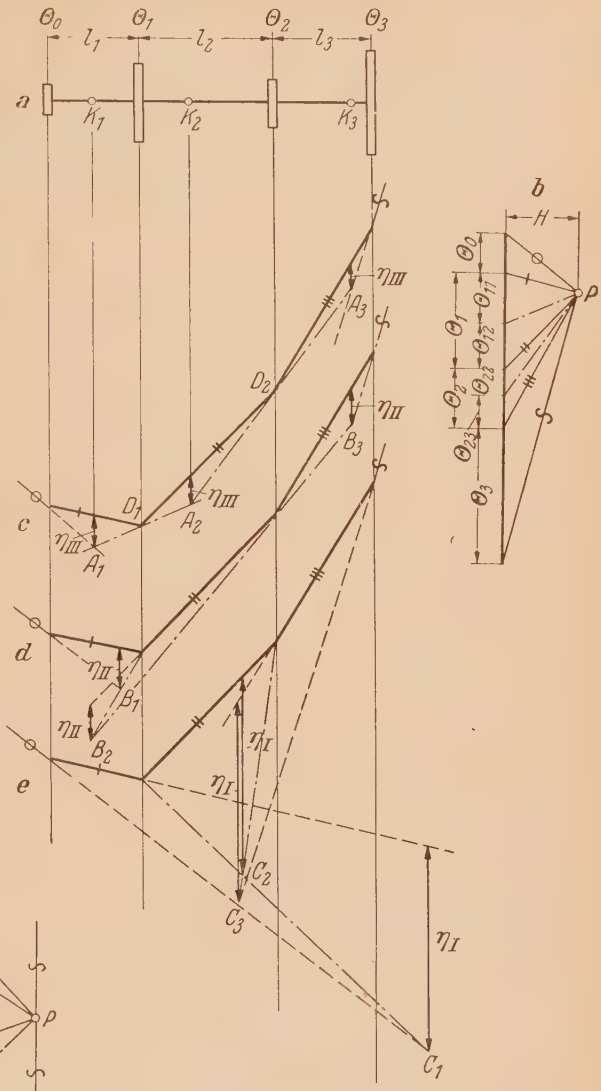


Abb. 42. Vier-Massen-System.

werden, die Abweichungen stets nach derselben Seite gehen, so daß, wenn auch nicht der Fehler selbst, so doch seine Richtung bekannt ist. Und zwar sind die nach *Kutzbach* ermittelten Werte untere Schranken der wahren.

Für die höchste Eigenfrequenz, wo die zugehörige Schwingungsform nur reelle Knotenpunkte besitzt, stimmt das *Kutzbach*sche Verfahren mit dem nach *Rausch* völlig überein. Für diese höchste Eigenfrequenz und die zugehörigen Knotenlagen liefert es also die genauen Werte.

Verhältnismäßig leicht zu überblicken ist das *Kutzbach*sche Vorgehen auch noch im anderen Extremfall, nämlich für die Grundschwingung. Hier betrachtet *Kutzbach* die Ordinate η des Seileckes im

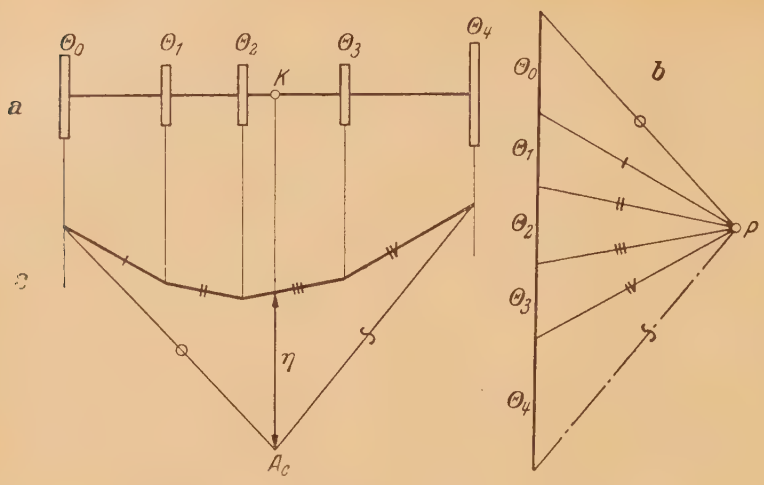


Abb. 44. Bestimmung der Grundfrequenz nach *Kutzbach*.

Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen als Maß für den Kehrwert des Frequenzquadrates (Abb. 44) und die Lage des Schnittpunktes A_0 als die des Knotens der Schwingungsform. Wir wollen nun zusehen, was die so gewonnenen Werte eigentlich bedeuten, und wie sie mit den gewünschten zusammenhängen.

Wir denken uns eine Welle nach Abb. 45 an einer Seite eingespannt. Für die Amplituden u_1, u_2, u_3 der Ausschläge der Drehmassen Θ_1, Θ_2, Θ_3 können wir das folgende System von homogenen algebraischen Gleichungen anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{C} z\,[\Theta_1 l_1 u_1 + \Theta_2 l_2 u_2 + \Theta_3 l_3 u_3]\,, \\ u_2 &= \frac{1}{C} z\,[\Theta_1 l_1 u_1 + \Theta_2 (l_1 + l_2) u_2 + \Theta_3 (l_1 + l_2) u_3]\,, \\ u_3 &= \frac{1}{C} z\,[\Theta_1 l_1 u_1 + \Theta_2 (l_1 + l_2) u_2 + \Theta_3 (l_1 + l_2 + l_3)\, u_3]\,. \end{aligned}\right\} \tag{18.1}$$

Die Gleichungen geben die Ausschläge u_1, u_2, u_3 an, wie sie unter Wirkung von Momenten $z\Theta_1 u_1$, $z\Theta_2 u_2$, $z\Theta_3 u_3$, das heißt den Momenten der bei einer harmonischen Bewegung auftretenden Trägheitskräfte, zustande kommen. Die Faktoren $\frac{1}{C} l_1$, $\frac{1}{C}(l_1+l_2)$, $\frac{1}{C}(l_1+l_2+l_3)$ sind dabei die jeweiligen Einflußzahlen. [Man könnte die Gleichungen (18.1) unter Berücksichtigung der Einspannung ($u_0=0$) auch aus den Bewegungsgleichungen (4.4) durch geeignete Addition einzelner Gleichungen gewinnen.]

Löst man die letzte der Gleichungen (18.1) nach $1/z$ auf, so kommt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{C}\left[\Theta_1 l_1 \frac{u_1}{u_3} + \Theta_2 (l_1+l_2) \frac{u_2}{u_3} + \Theta_3 (l_1+l_2+l_3)\right]. \tag{18.2a}$$

Vergleicht man hiermit den Ausdruck

$$\eta = \frac{1}{C}\,[\Theta_1 l_1 + \Theta_2 (l_1+l_2) + \Theta_3 (l_1+l_2+l_3)]\,, \tag{18.2b}$$

der dadurch entsteht, daß die Quotienten u_1/u_3 und u_2/u_3 gleich Eins gesetzt werden, so ist klar, daß

$$\eta > \frac{1}{z} \tag{18.3}$$

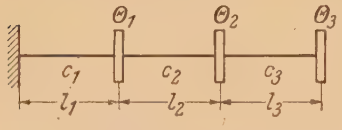


Abb. 45. Schwinger mit Einspannung.

ist. Denn wie aus den beiden ersten Gleichungen von (18.1) hervorgeht, gilt die Ungleichung $u_3 > u_2 > u_1$, so daß die Quotienten u_1/u_3 und u_2/u_3 echte Brüche darstellen; werden sie durch Eins ersetzt, so erhöht man den Wert. Ein Ausdruck von der Bauart der rechten Seite von (18.2b) wird aber, wie in Abschnitt **8** gezeigt wurde, gerade durch die Ordinaten des „Seilecks" geliefert. Die Ordinate η in Abb. 44c ist also ein Maß für die Größe (18.2b) der beiden in K eingespannten Teilschwinger. Nach (18.2a) ist η aber ein angenäherter Wert für $1/z$, also auch für die Eigenfrequenz des Schwingers. Und zwar ist, wie (18.3) aussagt, $1/\eta < z$, so daß man in $1/\eta$ eine untere Schranke des gesuchten Wertes z erhält. Für die Maßstäbe gilt wieder (17.3).

Wir merken noch an, daß die rechte Seite von (18.2b), also die Größe η, wie ein Vergleich mit der letzten Gleichung (18.1) zeigt, sich deuten läßt, als jener Ausschlag u_3 (des Schwingers nach Abb. 44), der zustande kommt, nicht unter Wirkung der Momente der Trägheitskräfte $u_\nu \Theta_\nu z$ der Schwingungsbewegung (Schwingungsausschlag), sondern unter Wirkung von Mo-

menten, die den „Massen" $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ selbst proportional sind (sogenannter „statischer" Ausschlag).

Nach der *Kutzbach*schen Vorschrift nimmt man also die Ordinate η nach (18.2b) als Näherung für das reziproke Frequenzquadrat der Grundschwingung nach (18.2a) und ebenso die Lage des Schnittpunktes A_0, die den Knoten im „statischen Fall" bezeichnen würde, als Näherung für die Lage des Knotens des zugehörigen Schwingungsbildes.

In den übrigen Fällen, wo mehr als ein, aber weniger als n reelle Knoten des Schwingungsbildes vorhanden sind, werden von *Kutzbach* ebenfalls nur die reellen Knoten des Schwingers betrachtet (nicht wie beim Verfahren nach *Rausch* auch die virtuellen). Der gesamte Schwinger wird durch Aufspaltung einzelner der Drehmassen Θ in ebenso viele Teilschwinger zerlegt wie reelle Knotenpunkte vorhanden sind, und jeder solche Teilschwinger als in der Grundschwingung (mit einem Knotenpunkt) schwingend gedacht. Für die zweiknotige Schwingung des Schwingers nach Abb. 46a handelt es sich dann also um folgende Aufgabe: Um jenen Punkt D im Seileck (Abb. 46c), der zu der aufgespaltenen Masse gehört, wird eine Gerade so lange gedreht, bis die Schnittpunkte A_1 und A_2 mit den äußeren Seilstrahlen zu gleichen Ordinaten η führen. Diese Ordinaten sind ein angenähertes Maß für den Kehrwert des Frequenzquadrates der Grundschwingung der beiden in Abb. 46d gezeichneten Teilschwinger, die durch Aufspaltung der Masse Θ_ν (im vorliegenden Fall Θ_2) zustande kommen, und damit für den Kehrwert des Frequenzquadrates der zweiknotigen Schwingung. Die Aufspaltung der Masse Θ_ν selbst wird durch die Parallele zur Geraden $A_1 D A_2$ in Abb. 46b bezeichnet. Die Lage der Schnittpunkte A wird als Näherung für die Lage der Knotenpunkte genommen.

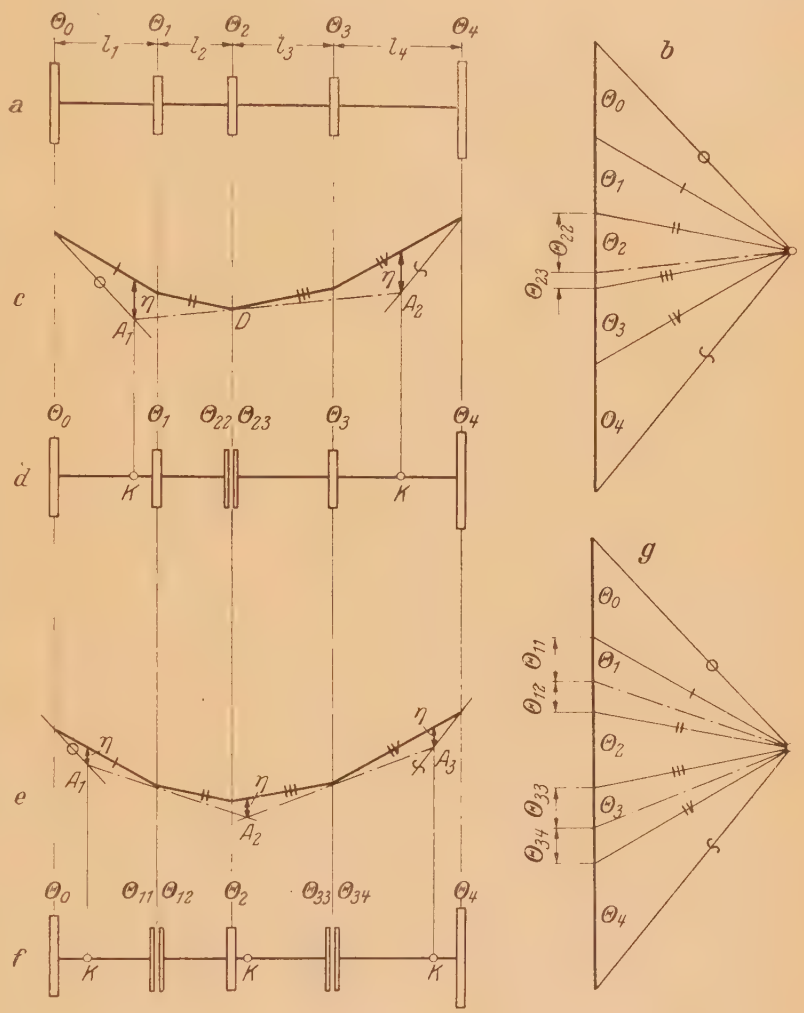


Abb. 46. Bestimmung der Eigenfrequenzen der zwei- und dreiknotigen Schwingung.

Auf die beschriebene Weise (in Abb. 46e, f und g ist die Konstruktion auch für die dreiknotige Schwingung durchgeführt) erhält man alle Schwingungsbilder und Eigenfrequenzen. Die der höchsten Schwingungsform sind dabei, wie die Übereinstimmung mit dem Verfahren nach *Rausch* zeigt, genau, die der übrigen nur angenähert richtig, wie die Betrachtung zeigt, die wir für die Grundschwingung durchgeführt haben, und die sich auf die übrigen Schwingungsformen ausdehnen läßt, weil diese ja als „Grundschwingung" von Teilgebilden erscheinen.

Wegen eines Beispiels sei auch hier zunächst auf Abschnitt **23** verwiesen, wo sich unter den verschiedenen Verfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenzen des vorgegebenen Schwingers

auch das *Kutzbach*sche befindet. Um jedoch zu zeigen, daß unter Umständen die Fehler beim *Kutzbach*schen Verfahren recht beträchtlich werden können, sei hier ein weiteres Beispiel eigens vorgeführt. Es handle sich um den Schwinger nach Abb. 47, der aus $n=7$ Wellenstücken und demgemäß $n+1=8$ Drehmassen besteht. Die Daten dieser Stücke sind

$$\Theta_0=\Theta_1=\cdots=\Theta_5=\Theta=0{,}860\ \mathrm{kg\,cm\,sec^2},\quad \Theta_6=1{,}120\ \mathrm{kg\,cm\,sec^2},\quad \Theta_7=\infty\,.$$
$$l_1=l_2=\cdots=l_5=l=50{,}6\ \mathrm{cm},\quad l_6=38{,}6\ \mathrm{cm},\quad l_7=84{,}5\ \mathrm{cm},$$
$$GJ_p=4{,}148\cdot 10^8\ \mathrm{kg\,cm^2}\,.$$

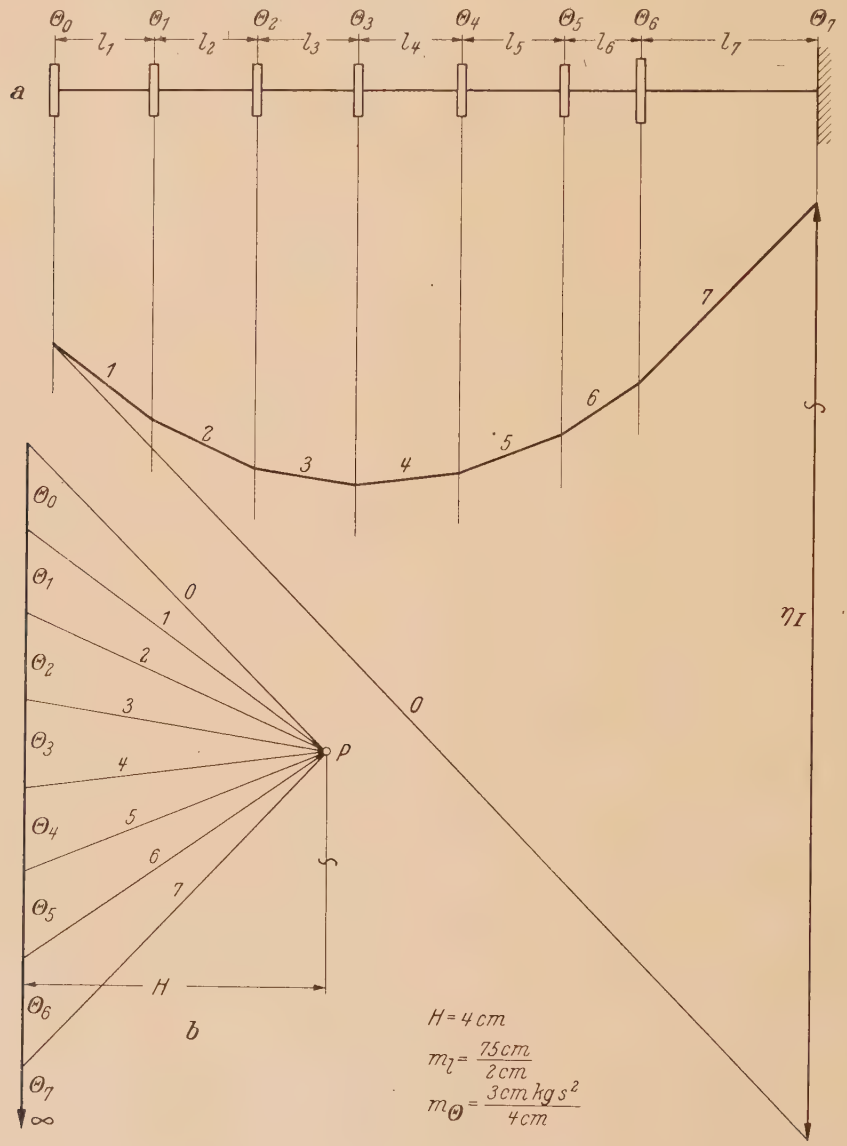


Abb. 47. Beispiel.

Abb. 47b zeigt die Ermittlung der niedrigsten Eigenfrequenz nach *Kutzbach*. Man findet $\omega_I' = 543\ \mathrm{sec}^{-1}$.

Zum Vergleich werde die Eigenfrequenz auch noch nach dem *Grammel*schen Verfahren von Abschnitt **12** ermittelt. Mit den angegebenen Werten erhält man

$$k^* = \frac{4{,}148\cdot 10^8}{43{,}516}\ \mathrm{sec}^{-2} = 0{,}954\cdot 10^7\ \mathrm{sec}^{-2}\,,$$

ferner

$$\gamma_6 = 1{,}311,\quad \gamma_6' = 1{,}008,\quad \gamma_7 = 0{,}460,\quad \gamma_7' = 0\,.$$

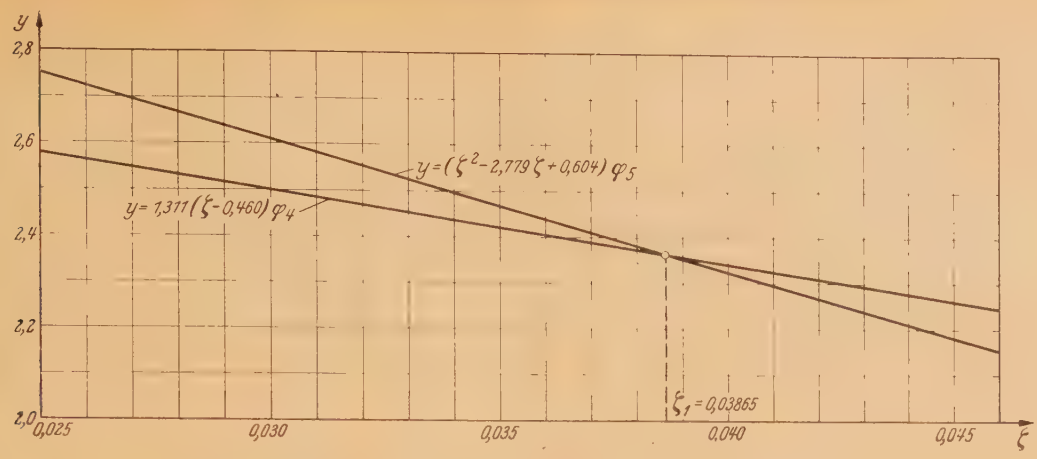


Abb. 48. Bestimmung der ersten Eigenfrequenz des Schwingers 47a nach *Grammel*.

Die Frequenzengleichung (12.9b) wird demgemäß zu

$$(\zeta^2 - 2{,}779\,\zeta + 0{,}604)\,\varphi_5 = 1{,}311\,(\zeta - 0{,}460)\,\varphi_4\,.$$

Die Bestimmung ihrer ersten Wurzel ζ_I zeigt Abb. 48. Man erhält $\zeta_I = 0{,}03865$, woraus folgt $\omega_I = 607\ \mathrm{sec}^{-1}$. Die Abweichung des nach *Kutzbach* gewonnenen Wertes beträgt immerhin

$$\frac{\omega_I' - \omega_I}{\omega_I} = -\frac{64}{607} = -10{,}5\,\%\,.$$

Die Abweichung geht, wie stets, nach unten. Sie ist in diesem Fall schon recht beträchtlich.

Im Jahre 1943 versuchte *W. Beck* [32] unter Beschränkung auf die Torsionsschwingung eine erneute Darstellung der *Kutzbach*schen Gedankengänge. Abgesehen von dieser Herausschälung der Torsionsschwingungen enthält die neue Darstellung keine bemerkenswerten Züge.

19. Die Abänderung des *Kutzbach*schen Verfahrens durch *G. Baranow* [17]. Den Umstand, daß das *Kutzbach*sche Verfahren für die höchste Eigenschwingungsform den genauen Wert von Frequenz- und Knotenlage liefert, sucht *Baranow* in der folgenden besonderen Weise zu verwerten. Nachdem für die höchste Schwingungsform des Schwingers mit n Massen die Frequenz und die $n-1$ Knotenpunkte aufgesucht und dadurch auch die (gedachten) Aufspaltungen der Massen vorgenommen sind, wird aus dem ursprünglich gegebenen Schwinger ein völlig neuer hergestellt. Er besteht aus $n-1$ Massen, die an den (schon bekannten) Knotenpunkten der höchsten Schwingungsform des ursprüng-

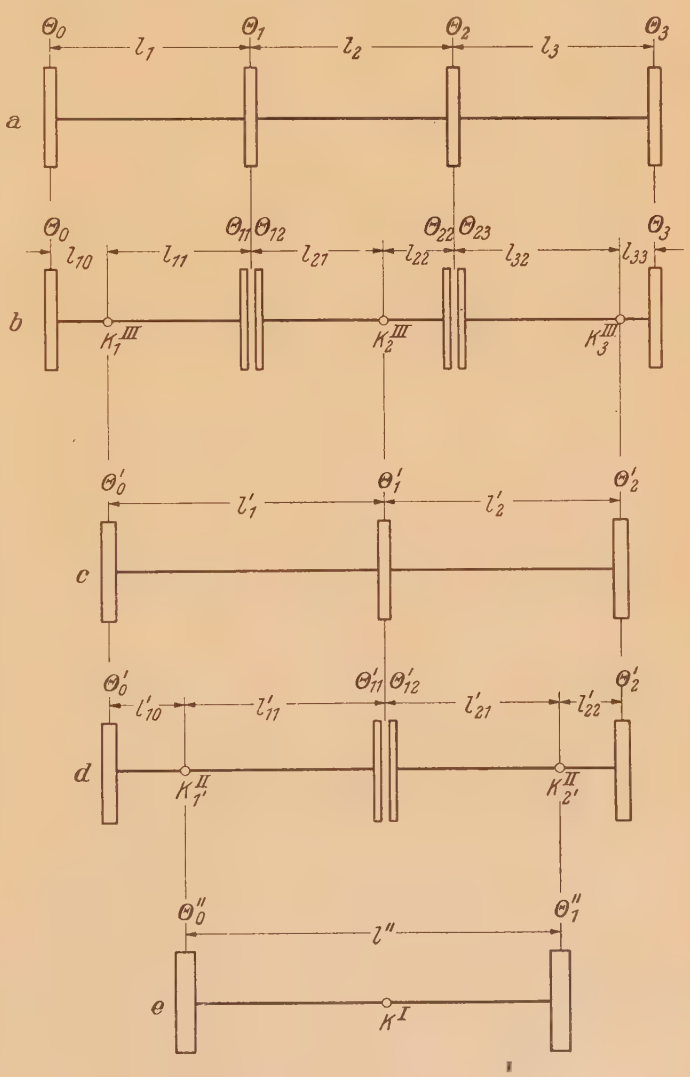


Abb. 49. Bildung neuer Schwinger nach *Baranow*.

lichen Schwingers sitzen. Diese Massen bestehen jeweils aus der Summe jener beiden Teilmassen, die vorher an den beiden Enden des zum Knotenpunkt gehörigen Wellenstückes saßen (vgl. Abb. 49). Oder anders ausgedrückt: Die n Massen des ursprünglichen Schwingers (von denen, mit Ausnahme der ersten und der letzten, alle in zwei Teilmassen zerlegt sind) werden zu neuen Massen in der folgenden Weise zusammengefaßt: Im Knotenpunkt eines jeden der $n-1$ Teilschwinger, in die das n-Massen-System zerlegt war, wird die Summe jener beiden Teilmassen angebracht, die zum betreffenden Teilschwinger gehörten. Für das so entstandene Gebilde, das nun $n-1$ Massen aufweist, wird wieder Eigenfrequenz und Knotenlage der höchsten Schwingungsform nach dem *Kutzbach*schen Verfahren aufgesucht. Von dieser Frequenz und der Lage der Knoten behauptet *Baranow*, daß sie angenähert übereinstimmen mit der Frequenz und der Knotenlage der $(n-2)$-knotigen Schwingung des ursprünglichen Gebildes. Ein Beweis für diese Behauptung kann hier nicht geliefert werden. In der deutschen Veröffent-

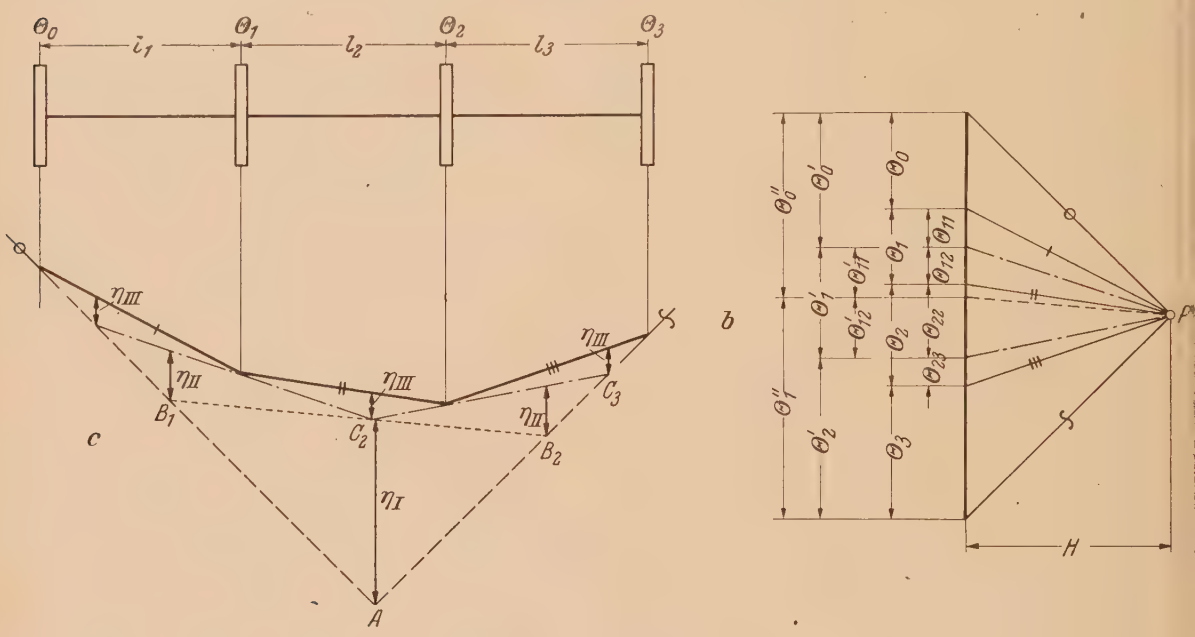


Abb. 50. *Baranow*sches Verfahren.

lichung *Baranows* ist lediglich das Verfahren beschrieben; wegen des Beweises ist auf die zitierte russische Originalarbeit verwiesen, die aber nicht zugänglich ist. Das genannte Verfahren gibt keine genauen, sondern Näherungswerte. Die so gewonnenen Frequenzen weisen jedoch eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit den auf anderen Wegen bestimmten auf, so daß das Verfahren als sehr gut brauchbar bezeichnet werden kann. Die Abweichungen von den genauen Werten gehen (im Gegensatz zum *Kutzbach*schen Verfahren) allerdings nicht nur nach einer Richtung.

Die Abb. 49a bis e veranschaulichen das Vorgehen nach *Baranow* hinsichtlich der Bildung neuer Schwinger aus den Teilmassen der alten; in Abb. 50 sind die zugehörigen Seilecke und Ordinaten η angegeben. Das Vier-Massen-System nach Abb. 49a wird mit Hilfe des ersten Seilecks in Abb. 50c und der Schnittpunkte C_1, C_2, C_3, zu denen die Ordinaten η_{III} gehören, in die Teilsysteme zerlegt, die Abb. 49b angibt. Aus diesen Teilschwingern des ursprünglichen Schwingers wird nun ein zweiter, neuer Schwinger (Abb. 49c) hergestellt. Seine Massen sitzen in den Knoten K_1^{III}, K_2^{III}, K_3^{III} des ursprünglichen Schwingers. Und zwar ist

$$\Theta_0' = \Theta_0 + \Theta_{11}\,,$$
$$\Theta_1' = \Theta_{12} + \Theta_{22}\,,$$
$$\Theta_2' = \Theta_{23} + \Theta_3\,.$$

Die Zusammenfassung zeigt auch Abb. 50b. Von diesem neuen Drei-Massen-System wird nun die höchste Eigenschwingzahl und Eigenschwingungsform aufgesucht. Die notwendigen Linien im Seileck zeigt wieder Abb. 50c: Durch C_2 ist eine Gerade zu legen, die in B_1 und B_2 zwei gleich große Ordinaten η_{II} als Maß für $1/\omega_{II}^2$ abschneidet. Die Teilmassen und Teillängen mit den

Knoten K_1^{II} und K_2^{II} zeigt Abb. 49d. Aus diesem Schwinger wird nun ein dritter hergestellt. Er enthält zwei Massen Θ_0'' und Θ_1'', die an den Stellen der Knoten K_1^{II} und K_2^{II} sitzen (Abb. 49e). Und zwar ist

$$\Theta_0'' = \Theta_0' + \Theta_{11}',$$
$$\Theta_1'' = \Theta_{12}' + \Theta_2'.$$

Dieses neue Zwei-Massen-System hat nur eine Eigenfrequenz und nur einen Knoten K^I. Die Eigenfrequenz wird durch die Ordinaten η_I in Abb. 50c, die Knotenlage durch den Schnittpunkt A bestimmt.

Wegen eines Beispieles verweisen wir auch hier auf Abschnitt **23**. Es sei nur noch angeführt, daß, wenn der in Abschnitt **18** nach *Kutzbach* (Abb. 52) behandelte Schwinger (wo sich ein Fehler von 10,5 % ergab) nach dem hier beschriebenen Verfahren untersucht wird, eine Eigenfrequenz von $\omega_I'' = 608\ \text{sec}^{-1}$ folgt. Das bedeutet praktisch eine völlige Übereinstimmung mit dem nach *Grammel* bestimmten Wert. Aus dieser Gegenüberstellung ersieht man deutlich die Verbesserung, die die *Baranow*sche Abänderung des *Kutzbach*schen Verfahrens mit sich bringt.

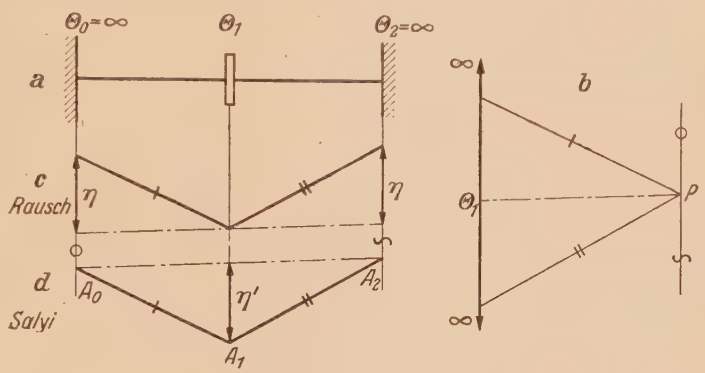


Abb. 51. Ein-Massen-System mit festen Enden.

20. Das Verfahren nach *S. Salyi* [31]. Auch dieses Verfahren wollen wir im wesentlichen durch eine Bezugnahme auf das Verfahren nach *Rausch* erörtern. Tun wir das, so werden wir sehen, daß es sich hier kaum um wesentlich neue Gesichtspunkte, vielmehr um eine manchmal zweckmäßigere Ausführungsform handelt.

Wir gehen aus von dem beiderseits eingespannten Schwinger nach Abb. 51a. Nach *Rausch* würde er als ein Drei-Massen-System mit den beiden unendlich großen Randmassen behandelt werden, so daß mit Hilfe von Abb. 51b das Seileck 51c mit den Ordinaten η an den Stellen der (hier an die Enden gerückten) Knotenpunkte zustande kommt. *Salyi* schlägt statt dessen vor (Abb. 51d), durch die Schnittpunkte A_0 und A_2, die die einfach und doppelt angestrichenen Seilstrahlen mit den äußeren Begrenzungen bilden, eine Verbindungsgerade A_0A_2 zu ziehen und den Abstand η' des Schnittpunktes A_1 von dieser Verbindungsgeraden als Maß für das reziproke Frequenzquadrat zu betrachten. Aus der Geometrie der Figuren ist sofort abzulesen,

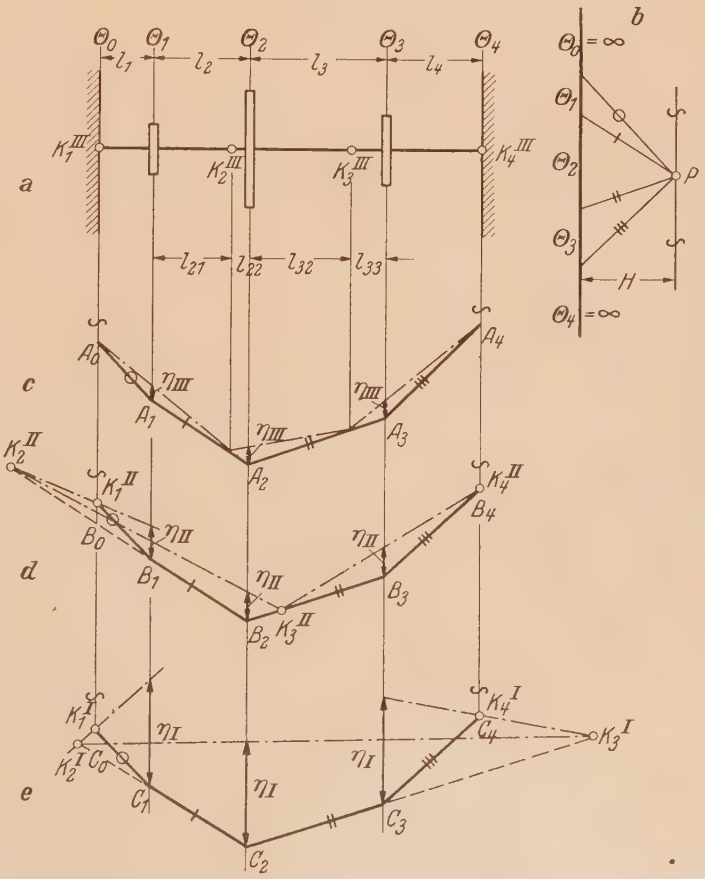


Abb. 52. Drei-Massen-System mit festen Enden.

daß $\eta' = \eta$ ist, das Vorgehen also berechtigt ist; es handelt sich nämlich im wesentlichen um eine Parallelverschiebung der betreffenden Linie. Daraus läßt sich dann für alle eingespannten Schwinger die Regel herleiten, daß man die Ordinaten η, die den Kehrwert des Frequenzquadrates angeben, an den Stellen der Massen Θ (nicht an den Knotenpunkten) gewinnt, wenn man so vorgeht, wie Abb. 52 andeutet: Nachdem das „Seileck" $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ in Abb. 52c gezeichnet ist, zieht man durch A_0 und A_4 einen zweiten (strichpunktierten) Kurvenzug, der an den Stellen der Massen Θ_1, Θ_2, Θ_3 gleich große Ordinaten η_{III} abschneidet; diese Ordinate η_{III} ist ein Maß für den Kehrwert des Frequenzquadrates z_{III}. Die Eckpunkte K_1^{III} und K_2^{III} bezeichnen die Stellen der Knoten. Außer dem in Abb. 52c gezeichneten Kurvenzug, der nur reelle Knotenpunkte liefert, gibt es noch zwei andere (Abb. 52d und e), die virtuelle Knoten und aus den zugehörigen Ordinaten η_{II} und η_I die beiden tieferen Schwingzahlen liefern.

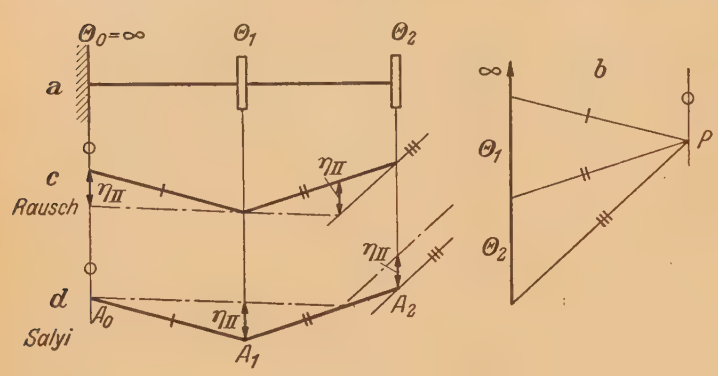


Abb. 53. Einseitig eingespanntes Zwei-Massen-System.

Will man nun nach dieser Regel ein nicht eingespanntes System behandeln, so muß man beachten, daß eine fehlende Feder am Ende („Fessel") gleichwertig ist einer unendlich langen Fessel. Für den Schwinger nach Abb. 53a ergibt sich demnach das in Abb. 53d gezeigte Vorgehen. Man erkennt ohne weiteres den Zusammenhang mit dem in Abb. 53c für dieselbe Schwingungsform gezeigten Vorgehen nach *Rausch* und sieht, daß die beiden Figuren durch eine Parallelverschiebung der strichpunktierten Linien auseinander hervorgehen.

Abb. 54 zeigt schließlich noch einen Vergleich der Verfahren nach *Rausch* und nach *Salyi* für das einfache Zwei-Massen-System. Hier ist das Vorgehen nach *Rausch* das naturgemäßere. Nach *Salyi* muß man zwei unendlich lange Fesseln hinzugefügt denken und erhält demgemäß die Abb. 54d.

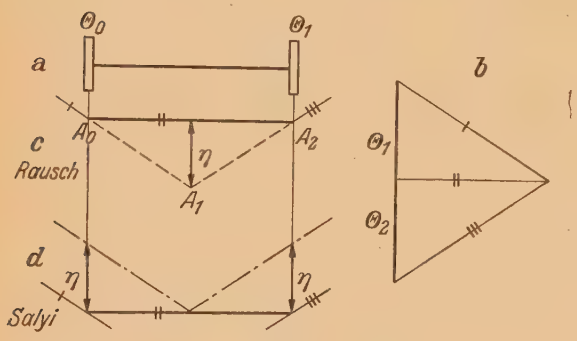


Abb. 54. Zwei-Massen-System.

Man kann demnach feststellen, daß das Vorgehen nach *Salyi* für Schwinger mit festgehaltenen Federenden (Fesseln) etwas übersichtlicher sein mag, während für Schwinger mit freien Endmassen das nach *Rausch* das angemessene ist. Irgendwelche sonstigen neuen Gesichtspunkte liegen dem Verfahren nach *Salyi* nicht zugrunde.

Beide Verfahren, das nach *Rausch* wie das nach *Salyi*, lassen sich für alle Schwingungsformen durchführen; sie liefern für jede Schwingungsform die genauen Werte der Frequenz und die Lage der Knoten. Der Maßstab $m\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$ ist für beide Verfahren derselbe; er wird durch (17.3) angegeben. Wegen eines Beispieles sei auch hier auf Abschnitt **23** verwiesen.

II. Andere zeichnerische Verfahren.

21. Das Verfahren nach *P. Kohn* [12]. Das hier zu besprechende Verfahren beruht ebenfalls auf der Zerlegung des Schwingers in Ein-Massen-Systeme gemäß Abb. 5b. Es verwertet die aus der Ein-Massen-Formel folgenden Gleichungen (17.2) jedoch nicht mit Hilfe des Seilecks, sondern mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck.

Man trägt gemäß Abb. 55a nach Wahl eines Maßstabes m_l für die Längen und m_Θ für die Massen der Reihe nach Strecken für die Größen $\Theta_0, l_1, \Theta_1, l_2, \Theta_2 \ldots l_n, \Theta_n$ auf. Dann errichtet man in den Zusammenstoßpunkten $A_1, A_2 \ldots$ der Strecken „Höhen" von einer geschätzten Länge h. Nun verbindet man A_0 mit B_1, geht rechtwinklig weiter nach der (die Federlänge l_1 darstellenden) Strecke $A_1 A_2$, die im Punkte K_1 getroffen wird, verbindet K_1 mit B_2, errichtet

wieder die Senkrechte, trifft auf T_1, verbindet mit B_3 und fährt so fort. Trifft der so konstruierte Geradenzug im letzten Punkte A_{2n+1} ein, so ist erstens h ein Maß für die reziproke Frequenz $1/\sqrt{z}$, zweitens teilen alle Punkte K_i die zugehörigen Federlängen l_i in die Teillängen $l_{i-1,i}$ und $l_{i,i}$ (die K_i bezeichnen also die Knotenpunkte), drittens teilen die Punkte T_i die Massen Θ_i in die Teilmassen $\Theta_{i,i}$ und $\Theta_{i,i+1}$. Der Maßstab, in dem h die reziproke Frequenz $1/\sqrt{z}$ mißt, ist wegen der aus (17.1) und (17.2) folgenden Gleichung

$$\frac{G J_p}{\omega^2} = l_{10}\,\Theta_0 = l_{11}\,\Theta_{11} = \cdots$$

gemäß (7.4)

$$m_{\frac{1}{\omega}} = \sqrt{\frac{m_l\, m_\Theta}{G J_p}}\,. \tag{21.1}$$

Alle diese Behauptungen folgen sofort aus der Geometrie der Figuren unter Benutzung des „Höhensatzes".

Trifft man mit dem Streckenzug nach einer ersten Wahl von h nicht in A_{2n+1} ein, so muß das Verfahren mit einem anderen Wert von h wiederholt werden. So fährt man fort, bis der Streckenzug genau in A_{2n+1} endet.

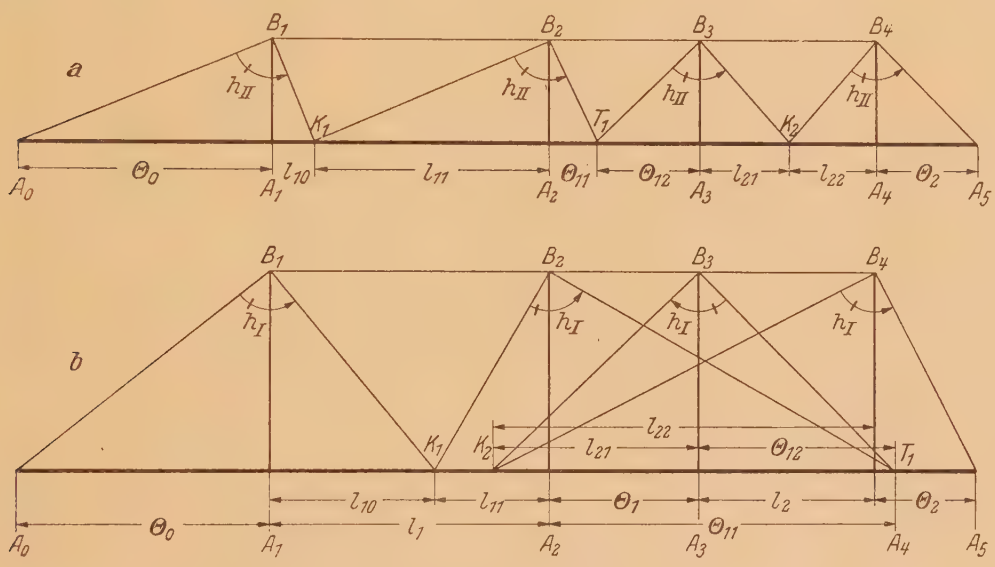


Abb. 55. Verfahren nach *Kohn*.

Abb. 55a bezieht sich auf die höchste Schwingungsform eines Drei-Massen-Systems, wo zwei reelle Knoten auftreten. Außer diesem einen Wert h, der zu ω_{II} gehört, gibt es noch einen zweiten, der zu ω_I gehört, und für den ein virtueller Knoten auftritt, der die zugehörige Strecke nicht innen, sondern außen teilt. Abb. 55b zeigt die zugehörige Figur. Der Knoten K_2 liegt nicht auf der Strecke l_2, sondern er teilt sie außen; ebenso liegt T_1 nicht auf der Strecke Θ_1, sondern außerhalb. Die notwendigen Bezeichnungen sind in die Abbildung eingetragen.

In Abschnitt **23** ist der untersuchte Schwinger auch nach dem Verfahren von *Kohn* bebehandelt.

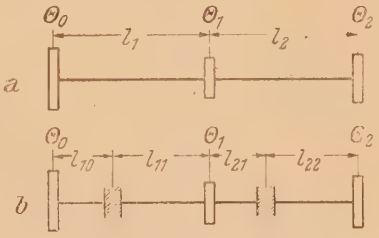


Abb. 56. Drei-Massen-System.

22. Das Verfahren nach *R. Dreves* [4]. Der Vorschlag von *R. Dreves* ist einer der ältesten. Es wird hier im wesentlichen aus diesem Grunde erwähnt, denn das Verfahren ist durch spätere, zweckmäßigere Vorschläge ersetzbar, also überholt.

Zerlegt wird der vorgegebene Schwinger nach *Dreves* in Ein-Massen-Systeme gemäß der Abb. 7, also nur durch Aufteilung der Längen mit Hilfe der Knotenpunkte, ohne Aufspaltung der Massen. Die weiteren Erörterungen führen wir an einem Drei-Massen-System als Beispiel durch (Abb. 56). Gemäß der Ein-Massen-Formel gilt dann

$$\omega^2 = \frac{G J_p}{l_{10}\,\Theta_0}\,,\quad \omega^2 = \frac{G J_p}{\Theta_1}\,\frac{l_{11}+l_{21}}{l_{11}\,l_{21}}\,,\quad \omega^2 = \frac{G J_p}{l_{22}\,\Theta_2}\,. \tag{22.1}$$

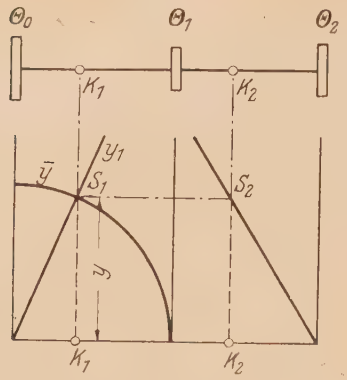


Abb. 57. Verfahren nach *Dreves*.

Es müssen also die drei Ausdrücke y_1, y_2, y_3, die jeweils die Größe GJ_p/ω^2 darstellen, einander gleich sein:

$$y_1 = \Theta_0\, l_{10}, \quad y_2 = \Theta_1 \frac{(l_1 - l_{10})(l_2 - l_{22})}{(l_1 - l_{10}) + (l_2 - l_{22})}, \quad y_3 = \Theta_2 l_{22}. \tag{22.2}$$

Dreves zeichnet nun, indem er die Längen l_{10} und l_{22} als Veränderliche betrachtet, geometrische Örter für die Lage des Knotenpunktes, sogenannte „Knotenpunktskurven", und zwar mit Hilfe einer ziemlich umständlichen graphischen Konstruktion. Ihr liegt im wesentlichen der folgende Gedankengang zugrunde: Erste Knotenpunktskurve ist die Gerade $y_1 = l_{10}$. Die zweite Knotenpunktskurve wird punktweise konstruiert: y_2 wird als Funktion von l_{22} mit l_{10} als Parameter betrachtet; man stellt den Schnittpunkt dieser Kurve $y_2(l_{22})$ mit der Geraden $y_3 = \Theta_2 l_{22}$ fest. Der Schnittpunkt ist ein Punkt der „Knotenpunktskurve". Variiert man nun den Parameter l_{10}, so erhält man eine Folge von Schnittpunkten der genannten Kurven. Sie bilden eine Kurve

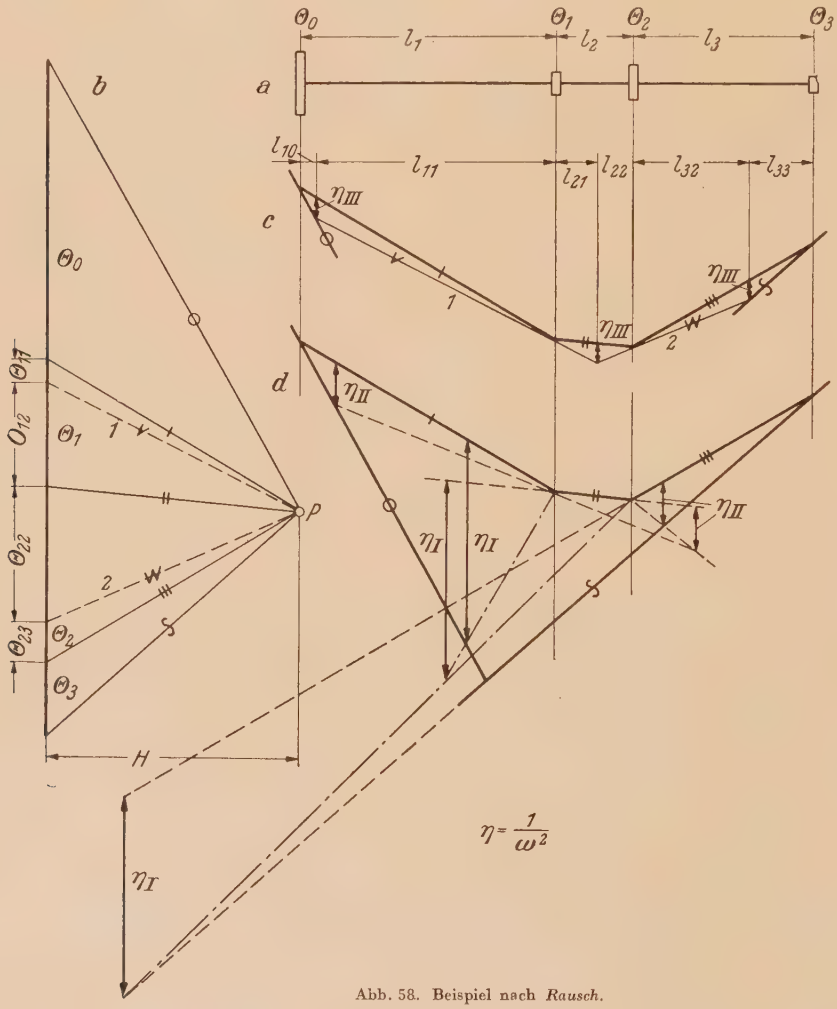


Abb. 58. Beispiel nach *Rausch*.

$\bar{y}(l_{10})$, eben die „zweite Knotenpunktskurve". Diese Kurve $\bar{y}(l_{10})$, für deren sämtliche Punkte die Beziehung $y_3(l_{22}) = y_2(l_{22})$ gilt, wird mit der „ersten Knotenpunktskurve" $y_1 = \Theta_0 l_{10}$ zum Schnitt gebracht. Die Ordinate dieses Schnittpunktes S_1 gibt den gesuchten Wert $y = GJ_p/\omega^2$, ihre Abszisse l_{10} legt den einen Knotenpunkt K_1 fest, eine Horizontale durch S_1 schneidet $y_3(l_{22})$

in S_2, wodurch der zweite Knotenpunkt K_2 bestimmt ist. Die Abb. 57 zeigt das Verfahren in schematischer Weise.

Enthält der Schwinger mehr als drei Massen, dann wird dieses Verfahren schon außerordentlich mühsam und zeitraubend. Wir verzichten deshalb auf eine ausführlichere Erörterung und auch auf ein zahlenmäßiges Beispiel.

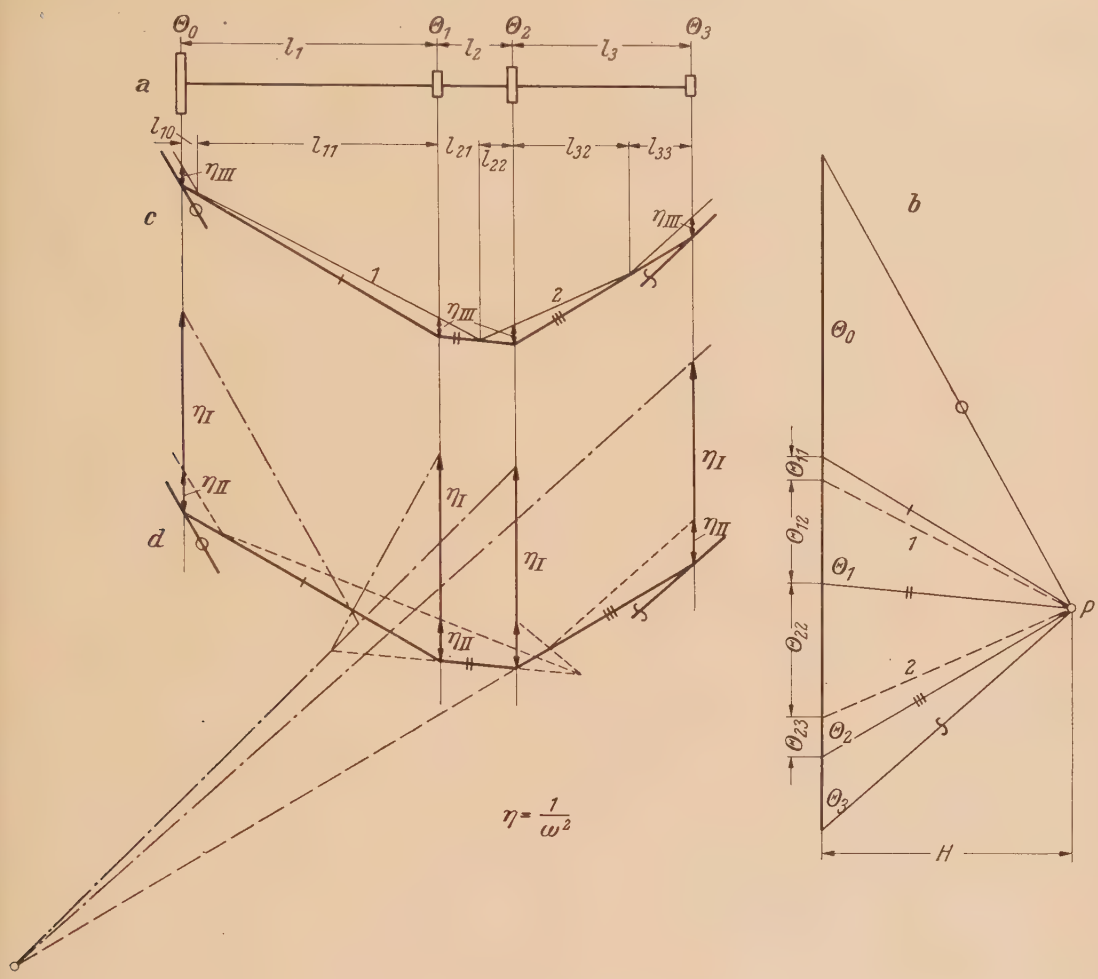


Abb. 59. Beispiel nach *Salyi*.

23. Ein nach den fünf zeichnerischen Verfahren der Abschnitte 17 bis 21 durchgeführtes Beispiel. Um einen Vergleich der genannten Verfahren sowohl hinsichtlich des Vorgehens wie auch hinsichtlich der Genauigkeit der Ergebnisse zu ermöglichen, werden wir nun einen und denselben Schwinger nach allen fünf Verfahren behandeln. Wir wählen dafür das schon in Abschnitt **10** untersuchte Vier-Massen-System mit folgenden Werten für Massen und elastische Längen:

$$\left.\begin{array}{ll} \Theta_0 = 0{,}36\ \mathrm{kg\,cm\,sec^2}, & l_1 = 100\ \mathrm{cm}, \\ \Theta_1 = 0{,}15\ \mathrm{kg\,cm\,sec^2}, & l_2 = 30\ \mathrm{cm}, \\ \Theta_2 = 0{,}21\ \mathrm{kg\,cm\,sec^2}, & l_3 = 70\ \mathrm{cm}, \\ \Theta_3 = 0{,}09\ \mathrm{kg\,cm\,sec^2}, & \end{array}\right\} \text{bezogen auf } G J_p = 10^6\ \mathrm{kg\,cm^2}$$

Abb. 58 zeigt das Vorgehen nach *Rausch*, 58a die Anordnung, 58c die Behandlung der höchsten Eigenschwingung (dritten Grades), 58d die der beiden übrigen Eigenschwingungen. In Abb. 58b ist die Aufteilung der Massen für die Schwingung dritten Grades eingezeichnet.

Abb. 59 zeigt denselben Schwinger in der Behandlung nach *Salyi*. Wie wir erwarten, stimmen die Ergebnisse überein. Beide Verfahren liefern ja die genauen Werte. Die Zahlenwerte sind in der Tabelle 8 enthalten.

Tabelle 8. *Eigenfrequenzen eines Vier-Massen-Systems, ermittelt nach den fünf Verfahren der Abschnitte 17 bis 21.*

Eigenfrequenz nach Absch. 10		*Kutzbach*	*Baranow*	*Rausch Salyi*	*Kohn*
ω_{III} $=682{,}6\ \mathrm{sec}^{-1}$	S_η [cm]		0,71		2,65
	ω [sec^{-1}]		685,2		689,2
	Fehler [%]		+0,3		+1,0
ω_{II} $=441{,}0\ \mathrm{sec}^{-1}$	S_η [cm]	1,79	1,73	1,69	4,11
	ω [sec^{-1}]	431,5	438,9	444,1	444,3
	Fehler [%]	−2,2	−0,5	+0,7	+0,75
ω_{I} $=204{,}1\ \mathrm{sec}^{-1}$	S_η [cm]	8,95	7,99	8,0	8,97
	ω [sec^{-1}]	193	204,3	204,2	203,5
	Fehler [%]	−5,5	+0,1	+0,05	−0,3

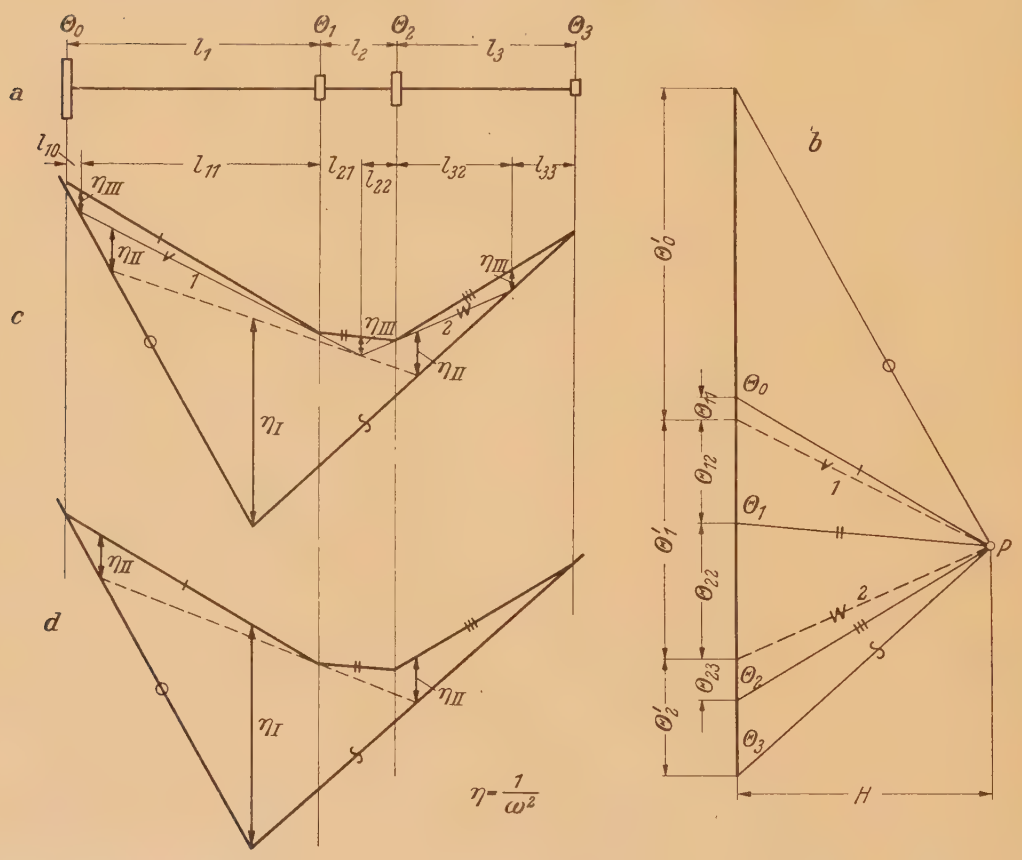


Abb. 60. Beispiel nach *Kutzbach* und *Baranow*.

Abb. 60d zeigt — für die Schwingung ersten und zweiten Grades, da das Vorgehen bei der Schwingung höchsten Grades mit dem Verfahren von *Rausch* übereinstimmt — die Durchführung nach *Kutzbach*. Man erkennt die veränderten Werte der Eigenfrequenzen (auch aus der Tabelle) und die veränderte Lage der Knoten. Die gefundenen Werte sind Näherungswerte. Man bestätigt noch, daß die Werte für die Eigenfrequenzen untere Schranken der wahren Werte darstellen. Auch über die relativen Fehler gibt die Tabelle Auskunft.

Abb. 60c zeigt — wieder für die beiden niedrigsten Schwingungsformen — das Vorgehen nach *Baranow*; aus Abb. 60b ist die Aufteilung der Massen für die Schwingung dritten Grades und die Zusammenfassung der Massen für das neue Drei-Massen-System ersichtlich. Man erkennt, daß die *Baranow*sche Abänderung des *Kutzbach*schen Verfahrens die Werte der Eigenfrequenzen verbessert. Den genauen Verfahren (nach *Rausch* und *Salyi*) gegenüber hat das

*Baranow*sche Vorgehen den Vorzug der erheblich größeren Einfachheit, die darin begründet ist, daß es nur mit reellen Knotenpunkten arbeitet. Es wäre auch bei mehr als vier Massen noch durchführbar, wo das Vorgehen nach *Rausch* oder *Salyi* nur unter ziemlich großen Schwierigkeiten zum Ziele führt.

In Abb. 61 ist derselbe Schwinger schließlich nach dem Verfahren von *Kohn* behandelt. Man erkennt auch hier, daß die niedrigsten Schwingungsgrade — wegen der virtuellen Knoten zu verwickelten Streckenzügen Veranlassung geben.

III. Rechnerische Verfahren.

24. Die Vorschläge von *H. Wydler* [6] und *O. Föppl* [8]. In den bisherigen Abschnitten dieses Teiles C haben wir gezeigt, wie der Gedanke der Aufteilung des Schwingers in Teilschwinger Veranlassung gab, nach zeichnerischen Wegen zu suchen, um die Gleichheit der auf der Ein-Massen-Formel beruhenden Ausdrücke (17.2) oder (22.2) herzustellen. Ein zeichnerisches

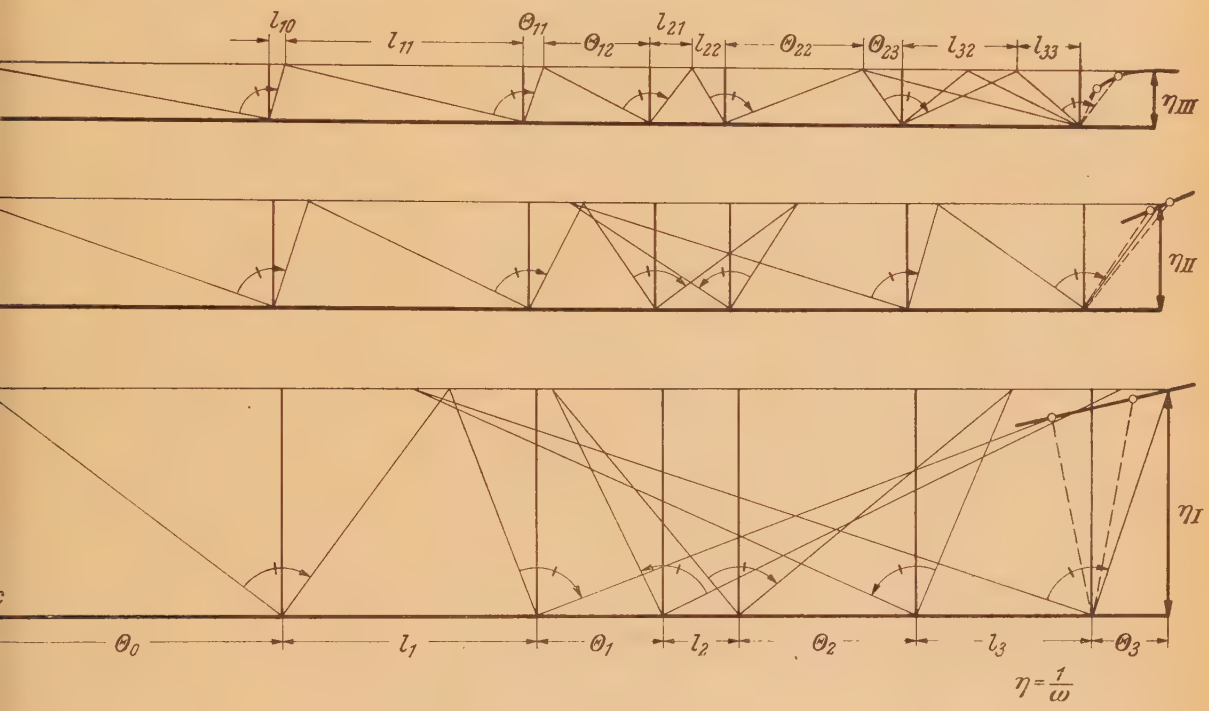


Abb. 61. Beispiel nach *Kohn*.

Vorgehen ist aber nicht etwa durch eine Notwendigkeit geboten. Der Gedanke der Aufteilung kann auch in anderer Weise verwertet werden. Dabei sei zunächst erwähnt, daß *R. Grammel* die grundlegende Rekursionsformel seines Verfahrens [18], die in (11.6) steckt — wenigstens in der Originalarbeit — nicht so hergeleitet hat wie wir in Abschnitt **11**, daß er zur Herleitung vielmehr den Gedanken der Aufspaltung des Schwingers in Ein-Massen-Systeme heranzog. Man kann also — und die in Abschnitt **6** nachgewiesene Gleichwertigkeit der Gedankengänge läßt dies ohne weiteres verständlich erscheinen — auch die Bewegungsgleichungen (samt den an sie anschließenden Verfahren zur Aufsuchung der Eigenfrequenzen) mit Hilfe des Gedankenganges der „Aufteilung" gewinnen. Das ist im wesentlichen auch der Weg, den *O. Föppl* geht, der ja als einer der ersten den Vorschlag einer „Aufteilung" gemacht hat. *H. Wydler*, der nahezu zur gleichen Zeit denselben Vorschlag machte, benutzt die Aufteilung nicht zur Herstellung der Bewegungsgleichungen (oder von Verfahren, die mit ihnen unmittelbar zusammenhängen), sondern dazu, für ein Zwei-, Drei-, Vier- oder Mehrmassen-System explizite Ausdrücke für die Eigenfrequenzen und die Ausschlagverhältnisse herzustellen. *Föppl* und *Wydler* benutzen übrigens verschiedene Arten der Aufteilung: *Föppl* eine gemäß Abb. 6, wo die Massen und Federn geteilt werden, *Wydler* eine gemäß Abb. 4b, wo nur die Massen aufgeteilt werden.

Für das Drei-Massen-System gewinnt *Wydler* z. B. die folgenden Ausdrücke:

a) für die Eigenfrequenz

$$\omega_{I,II} = \sqrt{\frac{G J_p}{l_1 \Theta_0}\left(1 + \frac{1}{A \pm \sqrt{A^2 - B}}\right)} \tag{24.1a}$$

mit

$$A = \frac{1}{2}\left(\mu_1 + \mu_2 \frac{1+\lambda}{1-\lambda\mu_3}\right), \quad B = \frac{\lambda \mu_1 \mu_2}{1+\lambda\mu_2}$$

und

$$\mu_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta_0}, \quad \mu_2 = \frac{\Theta_2}{\Theta_0}, \quad \lambda = \frac{l_2}{l_1},$$

b) für die Ausschlagverhältnisse

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= -\frac{1}{A \pm \sqrt{A^2 + B}} = -\frac{1}{\xi_{I,II}}, \\ \frac{u_2}{u_0} &= \left(\frac{\mu_1}{\xi} - 1\right)\frac{1}{\mu_2}. \end{aligned}\right\} \tag{24.1b}$$

Entsprechend gilt für das Vier-Massen-System mit den Abkürzungen

$$\mu_\nu = \frac{\Theta_\nu}{\Theta_0}, \quad \lambda_\nu = \frac{l_\nu}{l_1}$$

der folgende Ausdruck für die Eigenfrequenz:

$$\omega_{I,II,III} = \sqrt{\frac{G J_p}{l_1 \Theta_0}\left(1 + \frac{1}{\xi_{I,II,III}}\right)}. \tag{24.2a}$$

Dabei ist ξ eine Wurzel der Gleichung dritten Grades:

$$\xi^3 + K_2 \xi^2 + K_1 \xi + K_0 = 0,$$

in der die K_i folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{P}{N}, \\ K_1 &= \frac{1}{N}(P - Q - \mu_1) - \mu_1, \\ K_2 &= \frac{1}{N}(1 - Q - \mu_3 - \mu_2) - \mu_1 + 1, \\ N &= \lambda_2 \mu_3 - (1 - \lambda_2 \mu_2)(1 - \lambda_3 \mu_3), \\ P &= \lambda_2 \lambda_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3, \\ Q &= \lambda_3 \mu_3 \mu_2 (1 + \lambda_2). \end{aligned}$$

Die Ausschlagverhältnisse sind bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= -\frac{1}{\xi}, \\ \frac{u_2}{u_0} &= \lambda_2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\left(\frac{\mu_1}{\xi} - 1\right) - \frac{1}{\xi}, \\ \frac{u_3}{u_0} &= \frac{1}{\mu_3}\left[\frac{\mu_1}{\xi} - 1 - \left(\frac{u_2}{u_0}\right)\mu_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{24.2b}$$

Beim n-Massen-System erhält man mit den schon angegebenen Abkürzungen für μ_ν und λ_ν für die Eigenfrequenzen den Ausdruck

$$\omega_i = \sqrt{\frac{G J_p}{l_1 \Theta_0}\left(1 + \frac{1}{\xi_i}\right)}, \tag{24.3a}$$

wo ξ_i Wurzel der Gleichung $(n-1)$-ten Grades

$$\xi^{n-1} + K_{n-2}\xi^{n-2} + \cdots + K_1 \xi + K_0 = 0 \tag{24.3b}$$

ist. Diese Gleichung entsteht aus den n-2 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) &= \frac{1}{\mu_1 - \xi} + \frac{1}{\mu_2}, \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1}\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) &= \frac{1}{\mu_{n-2} - \xi} + \frac{1}{\mu_{n-1}}, \end{aligned}\right\} \tag{24.3c}$$

die ihrerseits aus dem Gedanken der Aufspaltung folgen.

Für die Ausschlagverhältnisse gilt entsprechend

$$\frac{u_\nu}{u_0} = \pm \left(\frac{\mu_1}{\xi} - 1\right)\left(\frac{\mu_2}{\xi} - 1\right) \cdots \left(\frac{\mu_{\nu-2}}{\xi} - 1\right) \frac{1}{\mu_{\nu-1}} . \tag{24.3d}$$

Im Grunde ist, wie man sieht, mit diesen Angaben noch nicht mehr geleistet als mit der Herstellung einer Frequenzengleichung. Denn gerade die Aufgabe der Ermittlung der Wurzeln der Gleichung (24.3b) bleibt ja noch zu leisten. Zudem ist das Gesetz, nach dem die Koeffizienten K_i in (24.3b) aufgebaut sind, ebenfalls nicht angegeben; die Gleichung muß im Einzelfall aus dem System (24.3c) erst gebildet werden. Die *Wydler*schen Angaben können eher bezeichnet werden als eine Anweisung zur Herstellung einer algebraischen Gleichung, die der Frequenzengleichung gleichwertig ist. Ein eigentliches Verfahren zur Lösung ist in den Vorschlägen nicht enthalten.

Dabei soll jedoch nicht unterlassen sein, festzustellen, daß die *Wydler*sche Schrift in klarer Darlegung eine Fülle von Bemerkungen über die Eigenschaften der in Rede stehenden torsionsschwingungsfähigen Systeme enthält.

D. Vergleich und Bewertung der angeführten Verfahren.

25. Der Vergleich von *E. Lehr* und *A. Weigand*. Im Teil **B** und **C** dieses Berichtes wurden der wesentliche Inhalt und die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Verfahren dargelegt. Nunmehr soll noch kurz auf ihre Brauchbarkeit in den praktisch häufig vorkommenden Fällen eingegangen werden.

Ein derartiger Vergleich wurde im Jahre 1936 schon einmal von *E. Lehr* und *A. Weigand* unternommen. Die Ergebnisse sind im Forschungsbericht FB 676 (herausgegeben von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtwesen über Luftfahrtforschung) niedergelegt. Zu ihrem Vergleich haben *Lehr* und *Weigand* herangezogen die Verfahren von *Tolle* [5], *v. Brauchitsch* [11], *Gümbel* [1], *Geiger* [2], *Waimann* [22], *Wydler* [6], *O. Föppl* [8], *Söchting* [23], *Kutzbach* [3], *Baranow* [17], *Kohn* [12], *Dreves* [4], *Grammel* [18], *Behrens* [16] und *Porter* [19].

Der Vergleich wurde in der Weise durchgeführt, daß der Zeitbedarf (in Stunden) ermittelt wurde, der notwendig war, um die Eigenfrequenzen eines Acht-Massen-Systems zu bestimmen. Das System bestand aus der Kurbelwelle eines BMW-VI-Motors mit Getriebe und Luftschraube, hatte also einen (aus sechs Drehmassen bestehenden) homogenen Kern und zwei Zusatzmassen auf der gleichen Seite. Die Daten des Systems waren die folgenden:

$$\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_4 = \Theta_5 = 1{,}133 \text{ kg cm sec}^2,$$
$$\Theta_6 = 1{,}49 \text{ kg cm sec}^2, \quad \Theta_7 = 189{,}5 \text{ kg cm sec}^2,$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 38{,}9 \text{ cm}, \quad l_6 = 22.86 \text{ cm}, \quad l_7 = 28{,}8 \text{ cm}$$

mit $J_p = 294 \text{ cm}^4$ und $G = 800000 \text{ kg cm}^{-2}$.

Das Ergebnis des Vergleichs wurde in einer Tabelle niedergelegt, die hier wiedergegeben sei:

Tabelle 9. *Ergebnisse des Vergleichs von Lehr-Weigand.*

Verfahren	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	Zeitbedarf
	sec^{-1}	sec^{-1}	sec^{-1}	sec^{-1}	sec^{-1}	sec^{-1}	sec^{-1}	Stunden
Tolle	538	1506	2322	3115	3850	4395	4820	27
v. Brauchitsch	536	1503	2320	3110	3840	4385	4810	19
Gümbel-Geiger	534	1495	—	—	—	—	—	6
Waimann	546	1510	—	—	—	—	—	3
Wydler	536	1504	2320	3108	3840	4390	4810	36
O. Föppl	538	1497	2322	3110	3850	4390	4815	24
Söchting	538	1505	2322	3115	3848	4385	4815	40
Kutzbach-Baranow	527	1503	2310	3160	3880	4460	4900	6
Grammel	540	1500	2315	3105	3840	4390	4815	8
Behrens	534	1500	2315	3115	3840	4390	4815	5
Porter	541	1535	2400	3315	4385	5520	6680	12

26. Kritik und weitere Bemerkungen. Wenn die Tabelle 9 auch einen recht guten Überblick über den Zeitbedarf und auch über die Genauigkeit der einzelnen Verfahren für das vorgelegte Beispiel gibt (so zeigt sie z. B., daß das Verfahren nach *Porter* für die höheren Frequenzen viel zu große Werte liefert), so ist sie erstens nicht vollständig, weil eine Reihe ebenfalls brauchbarer Verfahren fehlen, zweitens muß man im Auge behalten, daß schon durch die Auswahl des der Untersuchung zugrunde gelegten Systems bestimmte Verfahren naturgemäß bevorzugt wurden. nämlich jene, die auf ein System mit homogenem Kern und Zusatzmassen zugeschnitten sind. Der Vergleich sagt also nichts über die Brauchbarkeit der Verfahren in ganz anders gearteten Fällen aus. So würden z. B. für ein „stark inhomogenes" System das *Gümbel-Tolle*sche Verfahren oder auch das in Abschnitt **16** beschriebene *Biezeno-Grammel*sche Iterationsverfahren sich vermutlich mit weitem Abstand als die brauchbarsten erweisen.

Beschränkt man den Vergleich jedoch auf die praktisch in der Tat sehr häufigen Systeme mit homogenem Kern, so erweist sich das *Grammel*sche Verfahren durchaus als überlegen. Es ist einfach zu handhaben und sorgfältig durchgearbeitet; liegen doch sowohl die benötigten Formeln für nahezu alle nur denkbaren Motoranordnungen und auch das erforderliche Zahlenmaterial gebrauchsfertig vor.

Daß das Verfahren nach *Behrens* im *Lehr-Weigand*schen Vergleich so gut abschneidet, liegt u. a. daran, daß vorausgesetzt war, die den homogenen Kern betreffenden Kurven (β-Kurven) liegen fertig gezeichnet vor. Diese Voraussetzung ist nicht erfüllt, falls man auf die *Behrens*sche Veröffentlichung allein angewiesen ist. Allenfalls kann sie als erfüllt angesehen werden, wenn man die Weiterbildung des Verfahrens durch *Frank* und *Arnold* und damit die Kurvenblätter dieser Verfasser heranzieht. In diesem Fall kommt man in der Tat rasch zum Ziel.

Säßen die Zusatzmassen jedoch nicht auf der gleichen Seite, sondern auf verschiedenen Seiten des Kerns, so würde das *Grammel*sche Verfahren sich hingegen wiederum überlegen zeigen. Das Vorgehen bliebe nämlich nach *Grammel* im wesentlichen das gleiche, während das nach *Behrens-Frank-Arnold* sich ja nur mittels ziemlich verwickelter Gedankengänge übertragen läßt, wobei viel von der Anschaulichkeit verloren geht, die dieses Vorgehen sonst auszeichnet. Auch würde sich dann der Mangel an zweckmäßig aufgebauten Tabellen der β-Funktionen, die zur Konstruktion der β'-Kurven benötigt werden, störend bemerkbar machen.

Die graphischen Verfahren, die im Teil **C** dieses Berichtes beschrieben sind, können, soweit sie genaue Werte liefern, also auch die virtuellen Knoten benutzen müssen (*Rausch* und *Salyi*), im allgemeinen nur bei Systemen mit nicht mehr als vier Massen mit einem erträglichen Arbeitsaufwand benutzt werden. Das ursprüngliche *Kutzbach*sche Näherungsverfahren gibt, wie das Beispiel in Abschnitt **18** Seite 48 zeigt, oft schlechte Werte. Das *Baranow*sche liefert dagegen recht gute Näherungswerte bei verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand.

Bei der Anstellung von Vergleichen muß man zudem bedenken, daß „reine" Vergleiche schon deshalb keine absoluten Urteile verschaffen können, weil man sehr oft die Verfahren nicht „rein", sondern in geeigneten Kombinationen anwenden wird. So bedeutet es z. B. bei der Benutzung des *Gümbelschen* oder *Tolle*schen Verfahrens eine große Hilfe, wenn man Näherungswerte für die Eigenfrequenzen schon kennt, damit man die Durchrechnung auf solche Frequenzen beschränken kann, die in der Nähe der gesuchten liegen. Solche Näherungswerte kann man sich dann z. B. durch das rasch arbeitende *Kutzbach*sche Verfahren verschaffen, das für sich allein als nicht zweckmäßig, weil nicht genau genug, bezeichnet werden muß.

Noch aus einem weiteren Grunde ist ein Vergleich „mit der Stoppuhr" nur bedingt beweiskräftig: Gewöhnung und Übung sowohl an einzelne Gedankengänge wie auch an ein bestimmtes Vorgehen können im einen oder im anderen Fall Überlegenheiten schaffen, die nicht allgemein zuzutreffen brauchen. Diese Vorliebe für einzelne Gedankengänge und für bestimmte rechnerische oder zeichnerische Besonderheiten ist wohl überhaupt die treibende Kraft bei der Ausbildung der verschiedenen Verfahren gewesen, die nun in so bunter Vielfalt vor uns liegen.

Diese Verfahren sind hier alle ausführlich und hinsichtlich ihrer gegenseitigen Bedingtheit und Abhängigkeit dargelegt worden. Damit ist die Möglichkeit geschaffen, im Einzelfall jeweils jene Methode auszusuchen, die einerseits der vorliegenden Aufgabe, andererseits dem die Untersuchung Ausführenden (seinem Kopf oder seiner Hand) am besten angepaßt ist.

Verzeichnis der untersuchten Verfahren und Vorschläge in chronologischer Reihenfolge.

Nr.	Jahr	Verfasser	Zitat	Erörtert in Abschnitt
[1]	1912	*E. Gümbel*	Z. VDI. 56 (1912) S. 1025	10
[2]	1914	*J. Geiger*	Über Verdrehungsschwingungen von Wellen, insbesondere von mehrkurbligen Schiffsmaschinenwellen. Augsburg 1914	10
[3]	1917	*K. Kutzbach*	Z. VDI. 61 (1917) S. 917	18
	1918	*K. Kutzbach*	Z. VDI. 62 (1918) S. 100	
[4]	1918	*R. Dreves*	Z. VDI. 62 (1918) S. 588 u. 610	22
[5]	1921	*M. Tolle*	Regelung der Kraftmaschinen. Berlin 1921	10
[6]	1921	*H. Wydler*	Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen. Berlin 1921	24
[7]	1921	*G. Zerkowitz*	In *Wydler*, Anhang	6
[8]	1921	*O. Föppl*	Z. angew. Math. Mech. 1 (1921) S. 367	24
[9]	1921	*H. Holzer*	Die Berechnung der Drehschwingungen. Berlin 1921	10
[10]	1921	*F. Saß*	Z. VDI. 65 (1921) S. 67	14
[11]	1923	*E. v. Brauchitsch*	Z. techn. Phys. 4 (1923) S. 426	10
[12]	1926	*P. Kohn*	Maschinenbau 5 (1926) S. 220	21
[13]	1927	*J. Geiger*	Mechanische Schwingungen. Berlin 1927	14
[14]	1930	*E. Rausch*	Ing.-Arch. 1 (1930) S. 203	17
[15]	1930	*W. Benz*	Automobilt. Z. (1930) S. 648	14
[16]	1930	*H. Behrens*	Werft-Reederei-Hafen 11 (1930) S. 55, 141 u. 489; 12 (1931)	14
[17]	1931	*G. Baranow*	Met. Ind. Herald Moscow 11 (1931) S. 60; Z. VDI. 76 (1932) S. 184	19
[18]	1931	*R. Grammel*	Ing.-Arch. 2 (1931) S. 228; 3 (1932) S. 76, 277; 5 (1934) S. 23, sowie in	
		C. B. Biezeno und *R. Grammel*	Technische Dynamik. Berlin 1939	12
[19]	1931	*F. Porter*[1]	Trans. Am. Soc. Mech. Eng. OGP 53-2	14
[20]	1932	*W. Biber*	Dissert. T. H. München 1932	10
[21]	1934	*W. A. Tuplin*	Torsional vibrations. London 1934	11
[22]	1934	*K. Waimann*	Z. VDI. 78 (1934) S. 1083	10
[23]	1934	*F. Söchting*	Z. angew. Math. Mech. 14 (1934) S. 878	10
[24]	1935	*L. Kalichman*	Ann. Assoc. Ing. Ec. spec. Gand 25 (1935) S. 57	14
[25]	1935	*P. Funk*	Z. angew. Math.Mech. 15 (1935) S. 113	13/14
[26]	1936	*W. Behrmann*	Werft-Reederei-Hafen 17 (1936) S. 41	14
[27]	1938	*L. Collatz* und *Th. Pöschl*	Z. angew. Math. Mech. 18 (1938) S. 186	13
[28]	1938	*L. Strunz*	Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen. Berlin 1938	14
[29]	1939	*C. B. Biezeno* und *R. Grammel*	Technische Dynamik, Kap. XIII, Abschn. 43. Berlin 1939	16
[30]	1940	*B. Frank*	Ing.-Arch. 10 (1940) S. 371	15
[31]	1942	*St. Salyi*	Ing.-Arch. 13 (1942) S. 104	20
[32]	1943	*W. Beck*	Motort. Z. 5 (1943) S. 244	18
[33]	1944	*R. Arnold*	Diss. T. H. Karlsruhe 1944 und ATZ. 47 (1944) S. 95 u. 153	15

Von älteren Veröffentlichungen, die hier aber nicht eingebaut worden sind, mögen noch erwähnt werden:

—	1902	*O. Frahm*	Z. VDI. 46 (1902) S. 797, 880
—	1902	*A. Stodola*	Dampfturbinen, 5. Aufl. Berlin
—	1904	*P. Roth*	Z. VDI. 48 (1904) S. 564
—	1907	*H. Holzer*	Schiffbau 8 (1907) S. 823, 866, 904

[1] Zitiert nach *Lehr-Weigand*, Forschungsbericht 676 der Deutschen Luftfahrtforschung 1936.

(Eingegangen am 16. Oktober 1947.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Karl Klotter*, (17a) Karlsruhe-Rüppurr, Hegaustraße 4.

Eine einfache vektoranalytische Ableitung der Grundgleichungen der Elastomechanik für orthogonale, krummlinige Koordinaten.

Von J. Fadle.

1. Einleitung. Für die Lösung vieler Probleme der Elastizitätstheorie ist es von Vorteil, von einem Cartesischen Koordinatensystem auf ein der Problemstellung angepaßtes krummliniges Koordinatensystem überzugehen und auf dieses die Grundgleichungen der Elastomechanik umzurechnen. Die Umrechnung kann nach verschiedenen Methoden[1] durchgeführt werden, die im allgemeinen viel Überlegungen und einen erheblichen Rechenaufwand erfordern. Nun erweist sich die Vektor- und Affinoranalysis als ein Hilfsmittel von großer Einfachheit und Anschaulichkeit, welches die Lösung vieler schwieriger Probleme mühelos auffinden läßt. Im Laufe der Zeit hat dieser selbständige Zweig der Mathematik eine derartige Vollkommenheit erreicht, daß er geradezu als Stenographie der Mathematik bezeichnet werden kann; er hat ein breites Anwendungsgebiet besonders in der theoretischen Physik gefunden. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß sich auch der Ingenieur bei der Behandlung technischer Probleme mit Erfolg dieses anschaulichen Hilfsmittels bedienen kann, da es eine einfache Darstellung verwickelter Zusammenhänge gestattet und durch seine Anschaulichkeit besonders die räumliche Vorstellung entlastet.

2. Das Raumelement in krummlinigen Koordinaten. Ein Raumpunkt werde durch die dreidimensionale Mannigfaltigkeit des Ortsvektors

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(u, v, w)$$

in Abhängigkeit von drei veränderlichen Parametern u, v, w, welche die krummlinigen Koordinaten des Raumpunktes heißen, dargestellt. Setzt man einen der Parameter, z. B. w=konst., so beschreibt der Ortsvektor als zweidimensionale Mannigfaltigkeit bei Variation der beiden anderen Parameter u und v eine Fläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(u, v, c)\,.$$

Die Ausgangsgleichung definiert also drei Flächenscharen

$$u = \text{konst.}, \quad v = \text{konst.}, \quad w = \text{konst.},$$

oder in Vektorschreibweise

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(a, v, w), \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(u, b, w), \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(u, v, c)\,,$$

die man dadurch erhält, daß man die Konstanten a, b, c nacheinander verschiedene Werte annehmen läßt.

Die Schnittlinien der Flächenscharen v=konst. und w=konst. werden als $\mathfrak{u}$-Linien bezeichnet, entsprechend als $\mathfrak{v}$- und $\mathfrak{w}$-Linien die Schnittlinien der Flächenscharen u=konst. und w=konst. bzw. u=konst. und v=konst. Hingegen bezeichnet man die orthogonalen Trajektorien der Flächenschar u=konst. als u-Linien, entsprechend als v-Linien und w-Linien die orthogonalen Trajektorien der Flächenscharen v=konst. und w=konst.

Für unsere Betrachtungen ist der Fall besonders wichtig, daß die drei Flächenscharen zueinander orthogonal sind, wodurch die $\mathfrak{u}$-, $\mathfrak{v}$-, $\mathfrak{w}$-Linien mit den u-, v-, w-Linien zusammenfallen. Die Ortsfunktionen u, v, w werden dann als **orthogonale krummlinige Koordinaten** bezeichnet und zerlegen als ein dreifach orthogonales Netz den durch die Abhängigkeit $\mathfrak{x}\,(u, v, w)$ dargestellten Raumteil in unendlich kleine krummlinige Quader.

Zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen in orthogonalen krummlinigen Koordinaten betrachten wir ein durch die Flächenscharen u, v, w und $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ gebildetes Raum-

[1] Man vergleiche z. B.: *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, S. 42–46, Berlin 1939; Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 77–81, Berlin 1928.

element (Abb. 1) mit den Seitenlängen $U du$, $V dv$, $W dw$ auf den Koordinatenlinien unter der Wirkung seiner Oberflächenkräfte und seiner Volumkraft. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_w$ die partiellen Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ nach u, v, w, so sind die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien gegeben durch $\mathfrak{u}$ für die u-Linie, $\mathfrak{v}$ für die v-Linie, $\mathfrak{w}$ für die w-Linie. Darin bedeuten

$$\mathfrak{x}_u^2 = U^2, \quad \mathfrak{x}_v^2 = V^2, \quad \mathfrak{x}_w^2 = W^2. \tag{1}$$

Hieraus und vermöge der Orthogonalitätsbedingung

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0, \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_w = 0, \quad \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_w = 0 \tag{2}$$

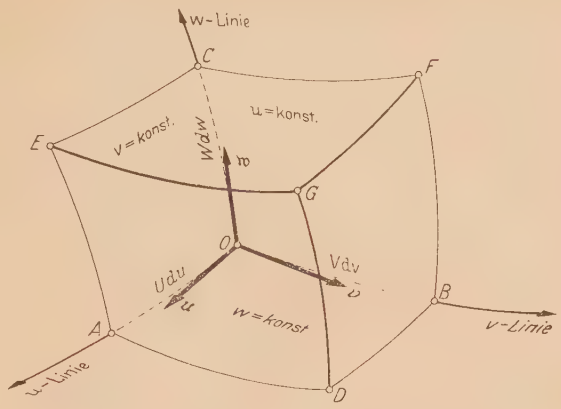


Abb. 1. Das Raumelement in krummlinigen Koordinaten.

kommen durch partielle Ableitung nach u, v, w die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_u &= U\frac{\partial U}{\partial u},\\
\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_v &= -\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u = -U\frac{\partial U}{\partial v},\\
\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_w &= -\mathfrak{x}_{uw}\mathfrak{x}_u = -U\frac{\partial U}{\partial w},\\
\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_u &= -\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_v = -V\frac{\partial V}{\partial u},\\
\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_v &= V\frac{\partial V}{\partial v},\\
\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_w &= -\mathfrak{x}_{vw}\mathfrak{x}_v = -V\frac{\partial V}{\partial w},\\
\mathfrak{x}_{ww}\mathfrak{x}_u &= -\mathfrak{x}_{uw}\mathfrak{x}_w = -W\frac{\partial W}{\partial u},\\
\mathfrak{x}_{ww}\mathfrak{x}_v &= -\mathfrak{x}_{vw}\mathfrak{x}_w = -W\frac{\partial W}{\partial v},\\
\mathfrak{x}_{ww}\mathfrak{x}_w &= W\frac{\partial W}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_w + \mathfrak{x}_{uw}\mathfrak{x}_v &= 0,\\
\mathfrak{x}_{vw}\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_w &= 0,\\
\mathfrak{x}_{uw}\mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_{vw}\mathfrak{x}_u &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Aus den letzten Gleichungen (3a) folgt aber

$$\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_w = 0, \quad \mathfrak{x}_{vw}\mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathfrak{x}_{wu}\mathfrak{x}_v = 0, \tag{3b}$$

und das Verschwinden dieser drei skalaren Produkte ist der Inhalt des Satzes von *Dupin*, wonach sich die Flächenscharen eines dreifach orthogonalen Systems paarweise in Krümmungslinien schneiden. Es kommt nämlich nach (2) und (3b) für die Flächen

$$\begin{aligned}
w &= \text{konst.}: \ \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = F_1 = 0, \quad \mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_w = M_1 = 0,\\
u &= \text{konst.}: \ \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_w = F_2 = 0, \quad \mathfrak{x}_{vw}\mathfrak{x}_u = M_2 = 0,\\
v &= \text{konst.}: \ \mathfrak{x}_w\mathfrak{x}_u = F_3 = 0, \quad \mathfrak{x}_{wu}\mathfrak{x}_v = M_3 = 0,
\end{aligned}$$

und das Verschwinden dieser beiden Mischprodukte F und M ist gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Koordinatenlinien Krümmungslinien sind. Beziehen wir also unsere weiteren Rechnungen auf ein dreifach orthogonales Koordinatennetz, so zerlegen die Koordinatenlinien als Krümmungslinien die von ihnen überdeckten Flächen in unendlich kleine Rechtecke und den Raum in unendlich kleine Quader.

Mit (3) und (3a) können wir die zweiten partiellen Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ durch seine Komponenten bezüglich der Tangentenvektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bestimmen. Wir erhalten in bekannter Weise mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_{uu} &= (\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{u})\,\mathfrak{u} + (\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{v} + (\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{w}\\ &= \frac{\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_u}{U}\,\mathfrak{u} + \frac{\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_v}{V}\,\mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_w}{W}\,\mathfrak{w}\end{aligned}$$

mit zwei ähnlichen Gleichungen für $\mathfrak{x}_{vv}$ und $\mathfrak{x}_{ww}$, und

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_{uv} &= (\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{u})\,\mathfrak{u} + (\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{v} + (\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{w}\\ &= \frac{\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_u}{U}\,\mathfrak{u} + \frac{\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_v}{V}\,\mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_w}{W}\,\mathfrak{w}\end{aligned}$$

mit zwei ähnlichen Gleichungen für $\mathfrak{x}_{uw}$ und $\mathfrak{x}_{vw}$. Schließlich kommt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{x}_{uu} &= \frac{\partial U}{\partial u}\,\mathfrak{u} - \frac{U}{V}\frac{\partial U}{\partial v}\,\mathfrak{v} - \frac{U}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\,\mathfrak{w}, & \mathfrak{x}_{uv} &= +\frac{\partial U}{\partial v}\,\mathfrak{u} + \frac{\partial V}{\partial u}\,\mathfrak{v},\\ \mathfrak{x}_{vv} &= -\frac{V}{U}\frac{\partial V}{\partial u}\,\mathfrak{u} + \frac{\partial V}{\partial v}\,\mathfrak{v} - \frac{V}{W}\frac{\partial V}{\partial w}\,\mathfrak{w}, & \mathfrak{x}_{uw} &= +\frac{\partial U}{\partial w}\,\mathfrak{u} + \frac{\partial W}{\partial u}\,\mathfrak{w},\\ \mathfrak{x}_{ww} &= -\frac{W}{U}\frac{\partial W}{\partial u}\,\mathfrak{v} - \frac{W}{V}\frac{\partial W}{\partial v}\,\mathfrak{v} + \frac{\partial W}{\partial w}\,\mathfrak{w}, & \mathfrak{x}_{vw} &= +\frac{\partial V}{\partial w}\,\mathfrak{v} + \frac{\partial W}{\partial v}\,\mathfrak{w}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3. Die partiellen Ableitungen eines Feldvektors $\mathfrak{k}$ nach den orthogonalen krummlinigen Koordinaten u, v, w. Der Vektor $\mathfrak{k}$ sei durch seine Komponenten bezüglich der Einheitsvektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ gegeben in der Form

$$\mathfrak{k} = a_1\,\mathfrak{u} + a_2\,\mathfrak{v} + a_3\,\mathfrak{w} = b_1\,\mathfrak{x}_u + b_2\,\mathfrak{x}_v + b_3\,\mathfrak{x}_w\,. \tag{5}$$

Bilden wir nun die partiellen Ableitungen des Feldvektors $\mathfrak{k}$ nach den Koordinaten u, v, w, so haben wir zu berücksichtigen, daß seine Komponenten

$$a_1 = b_1\,U,\quad a_2 = b_2\,V,\quad a_3 = b_3\,W \tag{5a}$$

Ortsfunktionen von u, v, w sind. Wir erhalten dann mit den Ergebnissen aus (4) z. B. durch partielle Ableitung von (5) nach u

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_u &= \frac{\partial b_1}{\partial u}\,\mathfrak{x}_u + \frac{\partial b_2}{\partial u}\,\mathfrak{x}_v + \frac{\partial b_3}{\partial u}\,\mathfrak{x}_w + b_1\,\mathfrak{x}_{uu} + b_2\,\mathfrak{x}_{uv} + b_3\,\mathfrak{x}_{uw}\\ &= U\frac{\partial b_1}{\partial u}\,\mathfrak{u} + V\frac{\partial b_2}{\partial u}\,\mathfrak{v} + W\frac{\partial b_3}{\partial u}\,\mathfrak{w} + b_1\left(\frac{\partial U}{\partial u}\,\mathfrak{u} - \frac{U}{V}\frac{\partial U}{\partial v}\,\mathfrak{v} - \frac{U}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\,\mathfrak{w}\right) +\\ &\qquad + b_2\left(\frac{\partial U}{\partial v}\,\mathfrak{u} + \frac{\partial V}{\partial u}\,\mathfrak{v}\right) + b_3\left(\frac{\partial U}{\partial w}\,\mathfrak{u} + \frac{\partial W}{\partial u}\,\mathfrak{w}\right)\\ &= \left[\frac{\partial (b_1 U)}{\partial u} + b_2\frac{\partial U}{\partial v} + b_3\frac{\partial U}{\partial w}\right]\mathfrak{u} + \left[-\frac{b_1 U}{V}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial (b_2 V)}{\partial u}\right]\mathfrak{v} +\\ &\qquad + \left[-\frac{b_1 U}{W}\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\partial (b_3 W)}{\partial u}\right]\mathfrak{w}\,.\end{aligned}$$

Entsprechend folgen zwei weitere Gleichungen für $\mathfrak{k}_v$ und $\mathfrak{k}_w$. Mit der Substitution (5a) erhalten wir schließlich die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{k}$ in der Form

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{k}_u &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial u} + \frac{a_2}{V}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{a_3}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\mathfrak{u} + \left(-\frac{a_1}{V}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial a_2}{\partial u}\right)\mathfrak{v} + \left(-\frac{a_1}{W}\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\partial a_3}{\partial u}\right)\mathfrak{w},\\ \mathfrak{k}_v &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial v} - \frac{a_2}{U}\frac{\partial V}{\partial u}\right)\mathfrak{u} + \left(\frac{a_1}{U}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial a_2}{\partial v} + \frac{a_3}{W}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\mathfrak{v} + \left(-\frac{a_2}{W}\frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial a_3}{\partial v}\right)\mathfrak{w},\\ \mathfrak{k}_w &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial w} - \frac{a_3}{U}\frac{\partial W}{\partial u}\right)\mathfrak{u} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial w} - \frac{a_3}{V}\frac{\partial W}{\partial v}\right)\mathfrak{v} + \left(\frac{a_1}{U}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{a_2}{V}\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial a_3}{\partial w}\right)w\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6) sind wir nunmehr in der Lage, die Differentialgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen in krummlinigen Koordinaten mühelos und besonders anschaulich herzuleiten.

4. Gleichgewichtsbedingungen am krummlinigen Raumelement. Wir betrachten nun das in Abb. 1 gezeichnete krummlinige Raumelement, das aus dem orthogonalen krummlinigen Koordinatensystem mit den Maschenweiten $U\,du$, $V\,dv$, $W\,dw$ gebildet wird, unter der Wirkung

seiner Oberflächenkräfte und seiner Volumkraft. Auf das Flächenelement $OADB$, welches in der Fläche w=konst. liegt und durch den Flächenvektor

$$\mathfrak{f}_{(w)} = -(U\mathfrak{u}\,du \times V\mathfrak{v}\,dv) = -UV\mathfrak{w}\,du\,dv$$

dargestellt wird, entfällt ein aus den zugehörigen Spannungen gebildeter Kraftvektor

$$-\mathfrak{K}_{(w)} = -\left[\tau_{(wu)}\mathfrak{u} + \tau_{(wv)}\mathfrak{v} + \sigma_{(w)}\mathfrak{w}\right] UV\,du\,dv.$$

Das negative Vorzeichen von $\mathfrak{K}_{(w)}$ soll dabei zum Ausdruck bringen, daß der entsprechende Flächenvektor $\mathfrak{f}_{(w)}$ in die negative Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{w}$ der w-Linie fällt. Bei den Zeigern der Schubspannungen bedeutet der erste Buchstabe die Zuordnung zur Fläche w=konst., der zweite Buchstabe die Zuordnung zur Richtung des parallelen Einheitsvektors der u- bzw. v-Linie. Entsprechend kommen $\mathfrak{K}_{(u)}$ und $\mathfrak{K}_{(v)}$ und wir erhalten schließlich

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{K}_{(u)} &= -\left[\sigma_{(u)}VW\mathfrak{u} + \tau_{(uv)}VW\mathfrak{v} + \tau_{(uw)}VW\mathfrak{w}\right] dv\,dw,\\ -\mathfrak{K}_{(v)} &= -\left[\tau_{(vu)}UW\mathfrak{u} + \sigma_{(v)}UW\mathfrak{v} + \tau_{(vw)}UW\mathfrak{w}\right] du\,dw,\\ -\mathfrak{K}_{(w)} &= -\left[\tau_{(wu)}UV\mathfrak{u} + \tau_{(wv)}UV\mathfrak{v} + \sigma_{(w)}UV\mathfrak{w}\right] du\,dv. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die gegenüberliegenden Seitenflächen liegen in Richtung zunehmender Koordinaten auf den Flächen $u+du$, $v+dv$, $w+dw$. So entfällt z. B. auf das Flächenelement $CEGF$, das in der Fläche $w+dw$=konst. liegt, ein Kraftvektor $\mathfrak{K}_{(w+dw)}$, der nach der *Taylor*schen Entwicklung für Vektoren unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung zu

$$\mathfrak{K}_{(w+dw)} = \mathfrak{K}_{(w)} + \frac{\partial\,\mathfrak{K}_{(w)}}{\partial w}\,dw + \cdots$$

folgt; entsprechend für die anderen Flächenelemente. Die Differenz der Kraftvektoren der beiden Flächenelemente $OADB$ und $CEGF$ ist somit

$$-\mathfrak{K}_{(w)} + \mathfrak{K}_{(w)} + \frac{\partial\,\mathfrak{K}_{(w)}}{\partial w}\,dw = \frac{\partial\,\mathfrak{K}_{(w)}}{\partial w}\,dw.$$

Das Raumelement ist dann im Gleichgewicht, wenn die Resultierende sämtlicher Kräfte der Nullvektor ist. Mit der Volumkraft

$$\mathfrak{P} = \left[X_{(u)}\mathfrak{u} + X_{(v)}\mathfrak{v} + X_{(w)}\mathfrak{w}\right] UVW\,du\,dv\,dw$$

lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial\,\mathfrak{K}_{(u)}}{\partial u}\,du + \frac{\partial\,\mathfrak{K}_{(v)}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial\,\mathfrak{K}_{(w)}}{\partial w}\,dw + \mathfrak{P} = 0. \tag{8}$$

Nach der Rechenvorschrift (6) für die Bildung der partiellen Ableitungen eines Vektors erhalten wir sofort aus (8) in Verbindung mit (7) die Gleichgewichtsbedingungen für krummlinige Koordinaten in der Form

$$\left.\begin{aligned} &\Big\{\left[\frac{\partial(\sigma_{(u)}VW)}{\partial u} + \tau_{(uv)}W\frac{\partial U}{\partial v} + \tau_{(uw)}V\frac{\partial U}{\partial w} + X_{(u)}UVW\right]\mathfrak{u} + \left[-\sigma_{(u)}W\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial(\tau_{(uv)}VW)}{\partial u}\right]\mathfrak{v} +\\ &+\left[-\sigma_{(u)}V\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\partial(\tau_{(uw)}VW)}{\partial u}\right]\mathfrak{w} +\\ &+\left[\frac{\partial(\tau_{(vu)}UW)}{\partial v} - \sigma_{(v)}W\frac{\partial V}{\partial u}\right]\mathfrak{u} + \left[\tau_{(vu)}W\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial(\sigma_{(v)}UW)}{\partial v} + \tau_{(vw)}U\frac{\partial V}{\partial w} + X_{(v)}UVW\right]\mathfrak{v} +\\ &+\left[-\sigma_{(w)}U\frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial(\tau_{(vw)}UW)}{\partial v}\right]\mathfrak{w} +\\ &+\left[\frac{\partial(\tau_{(wu)}UV)}{\partial w} - \sigma_{(w)}V\frac{\partial W}{\partial u}\right]\mathfrak{u} + \left[\frac{\partial(\tau_{(wv)}UV)}{\partial w} - \sigma_{(w)}U\frac{\partial W}{\partial v}\right]\mathfrak{v} +\\ &+\left[\tau_{(wu)}V\frac{\partial W}{\partial u} + \tau_{(wv)}U\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial(\sigma_{(w)}UV)}{\partial w} + X_{(w)}UVW\right]\mathfrak{w}\Big\}\,du\,dv\,dw = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Berücksichtigt man noch die Beziehungen

$$\tau_{(vu)} = \tau_{(uv)}, \qquad \tau_{(wu)} = \tau_{(uw)}, \qquad \tau_{(wv)} = \tau_{(vw)},$$

so kommen nach einer einfachen Umformung mit

$$\tau_{ij}\,U_k\frac{\partial U_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial(\tau_{ji}U_iU_k)}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{U_i}\,\frac{\partial(\tau_{ij}U_i^2U_k)}{\partial \alpha_j}$$

die gesuchten Formeln durch Nullsetzen der Faktoren der Einheitsvektoren aus (9) in der endgültigen Form

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(\sigma_{(u)}VW)}{\partial u} - \sigma_{(v)}W\frac{\partial V}{\partial u} - \sigma_{(w)}V\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{U}\left[\frac{\partial(\tau_{(uv)}U^2W)}{\partial v} + \frac{\partial(\tau_{(uw)}U^2V)}{\partial w}\right] + X_{(u)}UVW = 0,\\
&-\sigma_{(u)}W\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial(\sigma_{(v)}UW)}{\partial v} - \sigma_{(w)}U\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{1}{V}\left[\frac{\partial(\tau_{(vu)}V^2W)}{\partial u} + \frac{\partial(\tau_{(vw)}V^2U)}{\partial w}\right] + X_{(v)}UVW = 0,\\
&-\sigma_{(u)}V\frac{\partial U}{\partial w} - \sigma_{(v)}U\frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial(\sigma_{(w)}UV)}{\partial w} + \frac{1}{W}\left[\frac{\partial(\tau_{(wu)}W^2V)}{\partial u} + \frac{\partial(\tau_{(wv)}W^2U)}{\partial v}\right] + X_{(w)}UVW = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

5. Berechnung der Dehnungen und Winkeländerungen. Wir erteilen nun dem Punkt 0 mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}(u,v,w)$ aus Abb. 1 eine kleine Verschiebung

$$\bar{\mathfrak{v}} = \bar{u}\,\mathfrak{u} + \bar{v}\,\mathfrak{v} + \bar{w}\,\mathfrak{w}. \quad (11)$$

Dann geht der Punkt 0 über in den Punkt 0′ mit dem neuen Ortsvektor

$$\bar{\mathfrak{x}}(u,v,w) = \mathfrak{x}(u,v,w) + \bar{\mathfrak{v}}. \quad (12)$$

Die Punkte A, B, C auf den u-, v-, w-Linien gehen bei dieser Verschiebung über in die Punkte

$$\left.\begin{aligned}
&A' \text{ mit } \bar{\mathfrak{x}}(u,v,w) + \frac{\partial\bar{\mathfrak{x}}(u,v,w)}{\partial u}\,du + \cdots,\\
&B' \text{ mit } \bar{\mathfrak{x}}(u,v,w) + \frac{\partial\bar{\mathfrak{x}}(u,v,w)}{\partial v}\,dv + \cdots,\\
&C' \text{ mit } \bar{\mathfrak{x}}(u,v,w) + \frac{\partial\bar{\mathfrak{x}}(u,v,w)}{\partial w}\,dw + \cdots,
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wobei die Zuwächse die neuen Seitenlängen des deformierten krummlinigen Raumelementes darstellen.

Die Anwendung der Gleichungen (6) auf die Bildung der in (13) vorkommenden partiellen Ableitungen ergibt mit (12) und (11)

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{x}}_u &= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\bar{\mathfrak{x}}(u+\Delta u,v,w) - \bar{\mathfrak{x}}(u,v,w)}{\Delta u}\\
&= \mathfrak{x}_u + \left[\bar{u}_u + \frac{\bar{v}}{V}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\bar{w}}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\right]\mathfrak{u} + \left[-\frac{\bar{u}}{V}\frac{\partial U}{\partial v} + \bar{v}_u\right]\mathfrak{v} + \left[-\frac{\bar{u}}{W}\frac{\partial U}{\partial w} + \bar{w}_u\right]\mathfrak{w},\\
\bar{\mathfrak{x}}_v &= \mathfrak{x}_v + \left[\bar{u}_v - \frac{\bar{v}}{U}\frac{\partial V}{\partial u}\right]\mathfrak{u} + \left[\frac{\bar{u}}{U}\frac{\partial V}{\partial u} + \bar{v}_v + \frac{\bar{w}}{W}\frac{\partial V}{\partial w}\right]\mathfrak{v} + \left[-\frac{\bar{v}}{W}\frac{\partial V}{\partial w} + \bar{w}_v\right]\mathfrak{w},\\
\bar{\mathfrak{x}}_w &= \mathfrak{x}_w + \left[\bar{u}_w - \frac{\bar{w}}{U}\frac{\partial W}{\partial u}\right]\mathfrak{u} + \left[\bar{v}_w - \frac{\bar{w}}{V}\frac{\partial W}{\partial v}\right]\mathfrak{v} + \left[\frac{\bar{u}}{U}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\bar{v}}{V}\frac{\partial W}{\partial v} + \bar{w}_w\right]\mathfrak{w},
\end{aligned}$$

oder nach zweckmäßiger Umformung

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{x}}_u &= \left[1 + \frac{\bar{u}_u}{U} + \frac{\bar{v}}{UV}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\bar{w}}{UW}\frac{\partial U}{\partial w}\right]\mathfrak{x}_u + \left[-\frac{\bar{u}}{V^2}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\bar{v}_u}{V}\right]\mathfrak{x}_v + \left[-\frac{\bar{v}}{W^2}\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\bar{w}_u}{W}\right]\mathfrak{x}_w,\\
\bar{\mathfrak{x}}_v &= \left[\frac{\bar{u}_v}{U} - \frac{\bar{v}}{U^2}\frac{\partial V}{\partial u}\right]\mathfrak{x}_u + \left[1 + \frac{\bar{u}}{UV}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\bar{v}_v}{V} + \frac{\bar{w}}{VW}\frac{\partial V}{\partial w}\right]\mathfrak{x}_v + \left[-\frac{\bar{v}}{W^2}\frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\bar{w}_v}{W}\right]\mathfrak{x}_w,\\
\bar{\mathfrak{x}}_w &= \left[\frac{\bar{u}_w}{U} - \frac{\bar{w}}{U^2}\frac{\partial W}{\partial u}\right]\mathfrak{x}_u + \left[\frac{\bar{v}_w}{V} - \frac{\bar{w}}{V^2}\frac{\partial W}{\partial v}\right]\mathfrak{x}_v + \left[1 + \frac{\bar{u}}{UW}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\bar{v}}{VW}\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\bar{w}_w}{W}\right]\mathfrak{x}_w.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Aus (14) folgen schließlich die Dehnungen als Zuwächse der Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_w$ zu

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{(u)} &= \frac{\bar{u}_u}{U} + \frac{\bar{v}}{UV}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\bar{w}}{UW}\frac{\partial U}{\partial w},\\
\varepsilon_{(v)} &= \frac{\bar{u}}{UV}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\bar{v}_v}{V} + \frac{\bar{w}}{VW}\frac{\partial V}{\partial w},\\
\varepsilon_{(w)} &= \frac{\bar{u}}{UW}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\bar{v}}{VW}\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\bar{w}_w}{W}.
\end{aligned}\right\} \quad (14\text{a})$$

Schließlich erhalten wir die Winkeländerungen des ursprünglich orthogonalen krummlinigen Koordinatennetzes aus den skalaren Produkten der entsprechenden neuen Einheitsvektoren

(unter Vernachlässigung von Produkten der Verschiebungskomponenten) zu

$$\gamma_{(uv)} = \frac{\bar{\mathfrak{x}}_u}{\bar{U}}\frac{\bar{\mathfrak{x}}_v}{\bar{V}} \approx \frac{\bar{\mathfrak{x}}_u}{U}\frac{\bar{\mathfrak{x}}_v}{V} = \frac{1}{UV}\left[\left(\frac{\bar{u}_v}{U} - \frac{\bar{v}}{U^2}\frac{\partial V}{\partial u}\right)U^2 + \left(-\frac{\bar{u}}{V^2}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\bar{v}_u}{V}\right)V^2\right]$$
$$= \frac{1}{UV}\left[\bar{u}_v U - \bar{u}\frac{\partial U}{\partial v} + \bar{v}_u V - \bar{v}\frac{\partial V}{\partial u}\right],$$

und zwei weitere Gleichungen für $\gamma_{(uw)}$ und $\gamma_{(vw)}$. Nun ist aber

$$U_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \alpha_j} - \bar{v}_i \frac{\partial U_i}{\partial \alpha_j} = U_i^2 \frac{\partial\left(\frac{\bar{v}_i}{U_i}\right)}{\partial \alpha_j},$$

und wir erhalten die Winkeländerungen in der endgültigen Form

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{(uv)} &= \frac{1}{UV}\left[U^2 \frac{\partial\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)}{\partial v} + V^2 \frac{\partial\left(\frac{\bar{v}}{V}\right)}{\partial u}\right],\\
\gamma_{(uw)} &= \frac{1}{UW}\left[U^2 \frac{\partial\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)}{\partial w} + W^2 \frac{\partial\left(\frac{\bar{w}}{W}\right)}{\partial u}\right],\\
\gamma_{(vw)} &= \frac{1}{VW}\left[V^2 \frac{\partial\left(\frac{\bar{v}}{V}\right)}{\partial w} + W^2 \frac{\partial\left(\frac{\bar{w}}{W}\right)}{\partial v}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

6. Berechnung der Komponenten des Drehvektors $\mathfrak{d}$ aus dem Verschiebungsvektor $\bar{\mathfrak{v}}$. Wir bilden nun das Randintegral des Verschiebungsvektors $\bar{\mathfrak{v}}$ auf der Randlinie des Flächenelementes $OADB$, das auf der Fläche w=konst. liegt. Dann ist das Linienintegral $\oint \bar{\mathfrak{v}}\, d\mathfrak{r}$ gleich dem umrandeten Flächenelement, multipliziert mit der Komponente des Vektors $\mathrm{rot}\,\bar{\mathfrak{v}}$ in dieser Flächennormalen. Wir erhalten somit

$$(U\mathfrak{u}\, du \times V\mathfrak{v}\, dv)\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathfrak{v}} = UV du\, dv\, \mathfrak{w}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathfrak{v}} = \oint \bar{\mathfrak{v}}\, d\mathfrak{r}\,. \tag{15}$$

Die Ausrechnung dieses Linienintegrals ergibt mit (11) auf den einzelnen Linienelementen die Werte

längs OA: $\bar{\mathfrak{v}}\, U\mathfrak{u}\, du = \bar{u}\, U du$,

längs AD: $\bar{\mathfrak{v}}\, V\mathfrak{v}\, dv + \frac{\partial}{\partial u}(\bar{\mathfrak{v}}\, V\mathfrak{v}\, dv)\, du = \bar{v}\, V dv + \frac{\partial}{\partial u}(\bar{v}\, V)\, du\, dv$,

längs DB: $-\left[\bar{\mathfrak{v}}\, U\mathfrak{u}\, du + \frac{\partial}{\partial v}(\bar{\mathfrak{v}}\, U\mathfrak{u}\, du)\, dv\right] = -\bar{u}\, U du - \frac{\partial}{\partial v}(\bar{u}\, U)\, du\, dv$,

längs BO: $-\bar{\mathfrak{v}}\, V\mathfrak{v}\, dv = -\bar{v}\, V dv$.

Zusammengefaßt kommt somit für das Randintegral der Wert

$$\oint_{OADB} \bar{\mathfrak{v}}\, d\mathfrak{r} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\bar{v}\, V\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{u}\, U\right)\right] du\, dv$$

mit zwei ähnlichen Gleichungen für die Flächenelemente $OAEC$ und $OBFC$. Mit

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathfrak{v}} = 2\,\mathfrak{d} = 2\left[\omega_1 \mathfrak{u} + \omega_2 \mathfrak{v} + \omega_3 \mathfrak{w}\right]$$

wird folglich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathfrak{v}} &= \omega_1 = \frac{1}{2\,VW}\left[\frac{\partial(\bar{w}\, W)}{\partial v} - \frac{\partial(\bar{v}\, V)}{\partial w}\right],\\
\frac{1}{2}\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathfrak{v}} &= \omega_2 = \frac{1}{2\,UW}\left[\frac{\partial(\bar{u}\, U)}{\partial w} - \frac{\partial(\bar{w}\, W)}{\partial u}\right],\\
\frac{1}{2}\mathfrak{w}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathfrak{v}} &= \omega_3 = \frac{1}{2\,UV}\left[\frac{\partial(\bar{v}\, V)}{\partial u} - \frac{\partial(\bar{u}\, U)}{\partial v}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

7. Ableitung der Grundgleichungen mit Hilfe der Affinoranalysis. Im folgenden wird gezeigt, wie man dieselben Ergebnisse noch kürzer und eleganter mit Hilfe der Affinoranalysis herleiten kann. Ebenso wie ein Vektor als ein solches Gebilde definiert werden kann, das den verschiedenen Richtungen des Raumes skalare Größen nach einem in den Richtungskosinus linearen Gesetz zuordnet, kann ein Affinor als ein Gebilde nächst höherer Ordnung definiert werden, welches den verschiedenen Richtungen des Raumes Vektoren nach demselben in den Richtungskosinus linearen Gesetz zuordnet. Somit läßt sich die in einem Flächenelement eines deformierten Körpers wirkende Spannung $\mathfrak{s}$ mit Hilfe eines symmetrischen Affinors, dem Spannungstensor $\mathfrak{S}$ als lineare Vektorfunktion darstellen.

Gehen wir gleich auf ein orthogonales krummliniges räumliches Koordinatennetz über und bezeichnen mit $\mathfrak{s}_{(u)}$, $\mathfrak{s}_{(v)}$, $\mathfrak{s}_{(w)}$ die Werte des Spannungstensors $\mathfrak{S}$ für die u, v, w-Richtungen mit den Tangenteneinheitsvektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, so erhalten wir den Spannungstensor in der Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S} = \mathfrak{u};\ \mathfrak{s}_{(u)} + \mathfrak{v};\ \mathfrak{s}_{(v)} + \mathfrak{w};\ \mathfrak{s}_{(w)} = \mathfrak{u};\ & (\mathfrak{u}\,\sigma_{(u)} + \mathfrak{v}\,\tau_{(uv)} + \mathfrak{w}\,\tau_{(uw)}) \\ + \mathfrak{v};\ & (\mathfrak{u}\,\tau_{(vu)} + \mathfrak{v}\,\sigma_{(v)} + \mathfrak{w}\,\tau_{(vw)}) \\ + \mathfrak{w};\ & (\mathfrak{u}\,\tau_{(wu)} + \mathfrak{v}\,\tau_{(wv)} + \mathfrak{w}\,\sigma_{(w)}) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Auf jedes Flächenelement $d\mathfrak{f}$ entfällt eine Kraft $d\mathfrak{f}\,\mathfrak{S}$ und auf die Hülle F eines Raumteiles V kommt als Hüllenintegral $\oint d\mathfrak{f}\,\mathfrak{S}$ eine resultierende Kraft, die mit der auf das Volumselement entfallenden Volumkraft $\int \mathfrak{P}\,dV$ im Gleichgewicht stehen muß. Daraus fließt die Gleichgewichtsbedingung

$$\oint_F d\mathfrak{f}\,\mathfrak{S} + \int_V \mathfrak{P}\,dV = 0\,. \tag{18}$$

Das Hüllenintegral können wir aber nach dem *Gauß*schen Satz

$$\oint_F d\mathfrak{f} \circ \mathfrak{A} = \int_V \nabla \circ \mathfrak{A}$$

in ein Volumintegral umwandeln. Hierin ist ∇ der Nablaoperator, $\mathfrak{A}$ kann beliebig ein Skalar, ein Vektor oder ein Affinor sein, und das Zeichen $\circ$ läßt offen, auf welche Art der Flächenvektor $d\mathfrak{f}$ mit der nachstehenden Größe multipliziert werden soll. Wir erhalten also aus (18)

$$\oint_F d\mathfrak{f}\,\mathfrak{S} + \int_V \mathfrak{P}\,dV = \int_V (\nabla\,\mathfrak{S} + \mathfrak{P})\,dV = 0\,.$$

Da dieses Integral für beliebige Raumelemente erfüllt sein muß, so muß der Integrand selbst Null sein und es wird

$$\nabla\,\mathfrak{S} + \mathfrak{P} = 0\,.$$

Um auf einfache Art eine Beziehung für $\nabla\,\mathfrak{S}$ zu erhalten, greifen wir zurück auf die Divergenz eines Vektors als skalares Produkt des Nablaoperators mit diesem Vektor. Für orthogonale krummlinige Koordinaten kommt

$$\nabla\,\mathfrak{a} \equiv \operatorname{div}\mathfrak{a} = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial}{\partial u}(VW\,a_{(u)}) + \frac{\partial}{\partial v}(WU\,a_{(v)}) + \frac{\partial}{\partial w}(UV\,a_{(w)})\right],$$

wonach die Werte $a_{(u)}$, $a_{(v)}$, $a_{(w)}$ des Vektors $\mathfrak{a}$, mit bestimmten Faktoren multipliziert, nach ihrer eigenen Richtung abgeleitet werden. Wenden wir nun den Nablaoperator ebenfalls skalar auf den Affinor $\mathfrak{S}$ aus (17) an, so erhalten wir in Analogie zu $\nabla\mathfrak{a}$ die Beziehung

$$\nabla\,\mathfrak{S} = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial}{\partial u}(VW\,\mathfrak{s}_{(u)}) + \frac{\partial}{\partial v}(WU\,\mathfrak{s}_{(v)}) + \frac{\partial}{\partial w}(UV\,\mathfrak{s}_{(w)})\right],$$

nach welcher die Werte $\mathfrak{s}_{(u)}$, $\mathfrak{s}_{(v)}$, $\mathfrak{s}_{(w)}$ des Affinors $\mathfrak{S}$, mit denselben Faktoren multipliziert, nach ihren eigenen Richtungen abgeleitet werden. Multiplizieren wir noch mit UVW, so kommt schließlich

$$UVW\,(\nabla\,\mathfrak{S} + \mathfrak{P}) = \frac{\partial}{\partial u}(VW\,\mathfrak{s}_{(u)}) + \frac{\partial}{\partial v}(WU\,\mathfrak{s}_{(v)}) + \frac{\partial}{\partial w}(UV\,\mathfrak{s}_{(w)}) + UVW\,\mathfrak{P} = 0\,.$$

Wir überzeugen uns leicht durch Einsetzen der entsprechenden Werte aus (17), daß wir wiederum dieselben Gleichgewichtsbedingungen (9) erhalten.

Wenn jeder Raumpunkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ eine vektorielle Verschiebung $\overline{\mathfrak{v}}$ erfährt, so können wir uns unter dieser Verschiebung eine Raumtransformation vorstellen. Ist $\overline{\mathfrak{v}}$ eine stetige Ortsfunktion, so kann die Verschiebung eines benachbarten Raumpunktes mit Hilfe der Richtungsableitung als $\overline{\mathfrak{v}} + (d\mathfrak{x}\,\nabla)\overline{\mathfrak{v}}$ dargestellt werden. Ein Nachbarpunkt $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$ geht somit über in einen Punkt

$$\mathfrak{x}' + d\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + \overline{\mathfrak{v}} + (d\mathfrak{x}\,\nabla)\overline{\mathfrak{v}} = \mathfrak{x} + \overline{\mathfrak{v}} + d\mathfrak{x}\,(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,.$$

Wir erkennen daraus, daß der neue Ortsvektor des deformierten Raumpunktes durch $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + \overline{\mathfrak{v}}$ und die neue Verbindungsstrecke benachbarter Punkte nach der Verschiebung durch

$$d\mathfrak{x}' = d\mathfrak{x}\,(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}}) \tag{19}$$

dargestellt wird. Dabei ist $\mathfrak{E}$ der Einheitstensor und $\nabla;\overline{\mathfrak{v}}$ der Nablaaffinor der Verschiebung.

Somit erweist sich die Affinoranalysis als das angepaßte Hilfsmittel zur Darstellung einer stetigen Raumtransformation, wobei allein aus dem Affinor $\mathfrak{E}+\nabla;\overline{\mathfrak{v}}$ durch geschickte Umformung der Drehvektor, die Dehnungen und Winkeländerungen ermittelt werden können. Zunächst kann jeder Affinor in die Summe aus einem Tensor als symmetrischen und einem Axiator als antimetrischen Anteil aufgespalten werden. Beschränken wir uns auf die Betrachtung kleiner Verschiebungen, so können wir diese Aufspaltung des Affinors auf folgende Weise durchführen:

$$\mathfrak{E}+\nabla;\overline{\mathfrak{v}}=\mathfrak{E}+Ts(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})+Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\approx\left[\mathfrak{E}+Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\right]\left[\mathfrak{E}+Ts(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\right], \tag{20}$$

wobei wegen der Kleinheit der Verschiebungen das Produkt höherer Ordnung $Ts(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})$ vernachlässigt werden darf.

a) Der Drehvektor. Die Drehung eines Vektors $\mathfrak{r}_0$ um den Winkel φ um eine zum Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ parallele Drehachse wird in Vektorschreibweise durch die Beziehung

$$\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{e})\,\mathfrak{e}+\left[\mathfrak{e}\times(\mathfrak{r}_0\times\mathfrak{e})\right]\cos\varphi+(\mathfrak{e}\times\mathfrak{r}_0)\sin\varphi$$

ausgedrückt (man vergleiche hiezu Abb. 2). In der Affinoranalysis wird gezeigt, daß sich diese Drehung durch einen Versor $e^{\varphi\underline{\mathfrak{e}}}$, die Exponentialfunktion des Axiators $\varphi\underline{\mathfrak{e}}$ in der Form

$$\mathfrak{r}=e^{\varphi\underline{\mathfrak{e}}}\mathfrak{r}_0 \tag{21}$$

darstellen läßt. Dabei ist φ der Drehwinkel und $\underline{\mathfrak{e}}$ der Einheitsaxiator des zur Drehachse parallelen Einheitsvektors $\mathfrak{e}$.

Denken wir uns nun den einen Faktor $\mathfrak{E}+Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})$ aus (20) dadurch entstanden, daß die Reihenentwicklung für $e^{Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})}\approx\mathfrak{E}+Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})+\cdots$ wegen der Kleinheit der Verschiebungen mit dem zweiten Gliede abgebrochen wurde, so stellt $e^{Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})}$ den Versor mit dem Axiator $Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\equiv\underline{\nabla;\overline{\mathfrak{v}}}$ dar. Wollen wir noch die zu diesem Versor gehörige Drehachse bestimmen, so haben wir den Vektor von $Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})$ zu finden; der absolute Betrag dieses Vektors stellt dann den Drehwinkel dar.

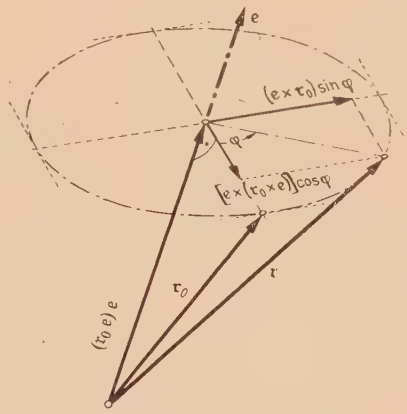


Abb. 2. Vektorische Darstellung einer Drehung des Vektors $\mathfrak{r}_0$ um die Achse $\mathfrak{e}$.

Aus der allgemeinen Definition der räumlichen Ableitungen als Grenzwert eines Hüllenintegrals für abnehmendes Volumen folgt sofort

$$Ax(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})=\frac{1}{2}\left[\nabla;\overline{\mathfrak{v}}-(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})_c\right]=\frac{1}{2}\lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\oint(d\mathfrak{f};\overline{\mathfrak{v}}-\overline{\mathfrak{v}};d\mathfrak{f})=-\frac{1}{2}\lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\oint\underline{d\mathfrak{f}\times\overline{\mathfrak{v}}}=-\frac{1}{2}\,\underline{\mathfrak{rot}\,\overline{\mathfrak{v}}},$$

d. h. die Drehachse ist parallel zu $\mathfrak{rot}\,\overline{\mathfrak{v}}$, und die Drehwinkel um die $\mathfrak{u},\mathfrak{v},\mathfrak{w}$-Achsen folgen zu

$$\omega_1=\frac{1}{2}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{rot}\,\overline{\mathfrak{v}},\qquad\omega_2=\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{rot}\,\overline{\mathfrak{v}},\qquad\omega_3=\frac{1}{2}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{rot}\,\overline{\mathfrak{v}}.$$

Die Aufspaltung eines Affinors in einen Tensor und einen Axiator liefert den Satz von *Helmholtz*, wonach jede infinitesimale Deformation aus einer reinen Deformation und einer reinen Drehung zusammengesetzt werden kann.

b) Die Drehungen. Wir haben gesehen, daß bei der Raumtransformation nach (19) eine Strecke $d\mathfrak{x}=\mathfrak{s}\,ds$ übergeht in $d\mathfrak{x}'=\mathfrak{s}'\,ds'=\mathfrak{s}\,ds\,(\mathfrak{E}+\nabla;\overline{\mathfrak{v}})$. Die dabei auftretende Dehnung ergibt sich wieder bei der Annahme kleiner Verschiebungen zu

$$\varepsilon_s=\frac{ds'-ds}{ds}=\frac{d\mathfrak{x}'\,\mathfrak{s}'-d\mathfrak{x}\,\mathfrak{s}}{ds}\approx\frac{(d\mathfrak{x}'-d\mathfrak{x})\,\mathfrak{s}}{ds}=\mathfrak{s}\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{s}.$$

Da der Nablaoperator in orthogonalen krummlinigen Koordinaten in der Form

$$\nabla=\mathfrak{u}\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial u}+\mathfrak{v}\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial v}+\mathfrak{w}\frac{1}{W}\frac{\partial}{\partial w}$$

gegeben ist, erhalten wir weiter

$$\varepsilon_s=\mathfrak{s}\left[\frac{1}{U}\mathfrak{u};\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial u}+\frac{1}{V}\mathfrak{v};\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial v}+\frac{1}{W}\mathfrak{w};\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial w}\right]\mathfrak{s}.$$

Im besonderen kommt für die Dehnungen in Richtung der Koordinatenlinien

$$\varepsilon_u = \mathfrak{u}\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{u} = \frac{1}{U}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial u}\mathfrak{u}\right),$$

$$\varepsilon_v = \mathfrak{v}\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{v} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial v}\mathfrak{v}\right),$$

$$\varepsilon_w = \mathfrak{w}\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{w} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial w}\mathfrak{w}\right),$$

welche Ergebnisse mit (14a) übereinstimmen.

c) Die Winkeländerungen. Wir betrachten nun zwei Strecken $d\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{s}_1 ds_1$ und $d\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{s}_2 ds_2$, welche nach der Deformation übergehen in

$$d\mathfrak{x}_1' = \mathfrak{s}_1 ds_1(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}}), \quad d\mathfrak{x}_2' = \mathfrak{s}_2 ds_2(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}}).$$

Bilden wir das skalare Produkt der neuen Einheitsvektoren $\mathfrak{s}_1'$ und $\mathfrak{s}_2'$, so können wir hierfür wegen der Annahme kleiner Verschiebungen näherungsweise setzen

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_1'\,\mathfrak{s}_2' &\approx \left[\mathfrak{s}_1(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}})\right]\left[\mathfrak{s}_2(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}})\right] = \mathfrak{s}_1(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,(\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}})_c\,\mathfrak{s}_2 \\ &\approx \mathfrak{s}_1\left[\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}} + (\nabla;\overline{\mathfrak{v}})_c\right]\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_1\left[\mathfrak{E} + 2\,Ts(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\right]\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_1\,2\,Ts(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{s}_2,\end{aligned}$$

wobei wiederum das Produkt höherer Ordnung $(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})_c$ vernachlässigt wurde. Sind im besonderen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ zwei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, so erhalten wir wegen $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = 0$ die Winkeländerung des ursprünglich rechten Winkels als

$$\gamma_{12} = \mathfrak{s}_1\,2\,Ts(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{s}_2 \quad (\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = 0).$$

Schreiben wir noch $Ts(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})$ in orthogonale krummlinige Koordinaten um, so kommt

$$\gamma_{12} = \mathfrak{s}_1\left[\frac{1}{U}\mathfrak{u};\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial u} + \frac{1}{V}\mathfrak{v};\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial v} + \frac{1}{W}\mathfrak{w};\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial w} + \frac{1}{U}\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial u};\mathfrak{u} + \frac{1}{V}\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial v};\mathfrak{v} + \frac{1}{W}\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial w};\mathfrak{w}\right]\mathfrak{s}_2.$$

Schließlich erhalten wir in Übereinstimmung mit (14b) die Winkeländerungen der ursprünglich rechtwinkligen Koordinatenlinien als

$$\gamma_{(uv)} = \mathfrak{u}\,2\,Ts\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{v} = \frac{1}{U}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial u}\mathfrak{v}\right) + \frac{1}{V}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial v}\right),$$

$$\gamma_{(vw)} = \mathfrak{v}\,2\,Ts\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{w} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial v}\mathfrak{w}\right) + \frac{1}{W}\left(\mathfrak{v}\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial w}\right),$$

$$\gamma_{(wu)} = \mathfrak{w}\,2\,Ts\,(\nabla;\overline{\mathfrak{v}})\,\mathfrak{u} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial w}\mathfrak{u}\right) + \frac{1}{U}\left(\mathfrak{w}\frac{\partial\overline{\mathfrak{v}}}{\partial u}\right).$$

8. Zusammenfassung. Im ersten Teil des vorliegenden Aufsatzes werden zunächst die Formeln für die partiellen Ableitungen eines Feldvektors $\mathfrak{f}$ entwickelt, der durch seine Komponenten bezüglich der Einheitsvektoren der orthogonalen krummlinigen Koordinatenlinien gegeben ist. Hierauf wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieser drei Differentialausdrücke sehr einfach und anschaulich die Grundgleichungen der Elastomechanik herleiten kann. Unterwirft man ein krummliniges Raumelement einem linearen Verzerrungszustand mit dem Verschiebungsvektor $\overline{\mathfrak{v}}$, so gehen die Seitenlinien gemäß der Transformation $\overline{\mathfrak{x}}(u,v,w) = \mathfrak{x}(u,v,w) + \overline{\mathfrak{v}}$ auf neue, nicht mehr orthogonale Koordinatenlinien über. Die Dehnungen in Richtung der alten Koordinatenlinien folgen aus den jeweiligen Zuwächsen der Vektoren $\overline{\mathfrak{x}}_u$, $\overline{\mathfrak{x}}_v$, $\overline{\mathfrak{x}}_w$ gegenüber den Ausgangsvektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_w$. Die Winkeländerungen wiederum werden aus den skalaren Produkten der Einheitsvektoren der neuen Koordinatenlinien erhalten, wobei wegen der Kleinheit der Verschiebungen annähernd $\overline{U_i} \approx U_i$ gesetzt wird. Schließlich wird der Drehvektor aus einem Randintegral als Rotor des Verschiebungsvektors $\overline{\mathfrak{v}}$ gefunden.

Im zweiten Teil werden dieselben Ergebnisse mit Hilfe der Affinoranalysis abgeleitet. Hiebei werden die Gleichgewichtsbedingungen dadurch erhalten, daß das Hüllenintegral für die auf die Hülle eines Raumteiles entfallende Oberflächenkraft nach dem *Gauß*schen Satz in ein Volumintegral verwandelt wird. Für den Deformationszustand werden Drehvektor, Dehnungen und Winkeländerungen durch Umformung des Deformationsaffinors $\mathfrak{E} + \nabla;\overline{\mathfrak{v}}$ erhalten.

(Eingegangen am 27. Oktober 1947.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Johann Fadle*, (17a) Karlsruhe, Georg-Friedrich-Straße 17.

Über die Formänderungen der Balken im elastisch-plastischen Zustand*.

Von W. Swida.

1. Einleitung. Die Untersuchung der Biegelinie eines Trägers aus einem elastisch-idealplastischen Werkstoff wurde von *J. Fritsche*[1] auf dem Wege der Integration der Differentialgleichung der gebogenen Balkenachse durchgeführt. Bei diesem Verfahren müssen für einen unsymmetrisch durch eine Einzellast beanspruchten einfachen Träger auf zwei Stützen mindestens acht Integrationskonstante ermittelt werden.

Einen zweiten Weg zur Lösung der Aufgabe bietet die Anwendung der Formänderungsenergiesätze, die in den Arbeiten von *J. Fritsche*[2], *K. Hohenemser*[3] und des Verfassers[4] aufgestellt wurden.

F. Hartmann[5] hat ein graphisches Näherungsverfahren angegeben, in dem das Seileck zur Bestimmung der Durchbiegungen benützt wird.

In der vorliegenden Arbeit wird eine graphisch-analytische Methode entwickelt, welche sehr einfach ist und die Balkenformänderungen mit derselben Genauigkeit zu errechnen erlaubt, wie die Integration der Differentialgleichung der Biegelinie oder die Anwendung der Formänderungsenergiesätze. Diese Methode kann in gewissem Sinne als eine Erweiterung des Verfahrens von *Mohr* auf das Gebiet der elastisch-plastischen Deformationen aufgefaßt werden.

Als Grundlage für die Darlegungen nehmen wir das idealisierte Spannungs-Dehnungsdiagramm (Abb. 1), das schon in einer Reihe von Arbeiten angewandt wurde. Die Zugrundelegung eines anderen Abhängigkeitsdiagramms zwischen Spannung und Dehnung würde die Lösung des Problems außerordentlich komplizieren.

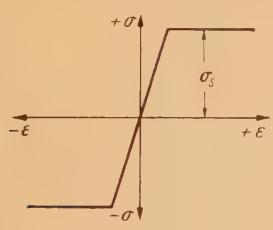


Abb. 1.

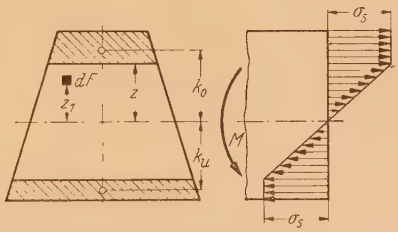


Abb 2.

2. Allgemeine Theorie. Es werden folgende Annahmen zugrunde gelegt:

a) Ursprünglich ebene Querschnitte bleiben auch nach der Biegung eben und die seitliche Pressung zwischen den Längsfasern kann vernachlässigt werden.

b) Jeder Querschnitt hat mindestens eine Symmetrieachse, und diese Achse liegt in der Wirkungsebene der äußeren Kräfte.

c) Die Balkenformänderungen sind gering.

d) Die Zug- und Druckfließgrenzen bei der Biegung sind gleich.

Außerdem sollen der Einfluß der Querschnittsformänderungen auf die Spannungsverteilung sowie der Einfluß der Schubspannungen auf die Größe der Formänderungen außer acht gelassen werden.

Auf Grund der obigen Annahmen bestimmen wir zunächst die Krümmung der neutralen Fläche in einem beliebigen Querschnitt. Wir nehmen an, daß die plastischen Zonen sich für den zu betrachtenden Balkenabschnitt auf beiden Seiten der neutralen Achse gebildet haben (schraffiert in Abb. 2).

---

* Nach einem Vortrag, gehalten auf der Mathematiker-Tagung in Karlsruhe, Ostern 1947, Mitteilung III. Die anderen Teile des Vortrages s. Ing.-Archiv 16 (1948), S. 221 und 16 (1948), S. 357. Siehe auch Z. angew. Math. u. Mech., 25/27, 1947, S. 168.

[1] *J. Fritsche*, Bauing. 11 (1930) S. 851.

[2] *J. Fritsche*, Z. angew. Math. Mech. 11 (1931) S. 176.

[3] *K. Hohenemser*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 472.

[4] *W. Swida*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 221.

[5] *F. Hartmann*, Schweiz. Bauztg. 101 (1933) S. 37.

Die Gleichgewichtsbedingungen des linken Balkenteiles (Abb. 2) lauten

$$(F_0 - F_u)\,\sigma_s = -\frac{E}{\varrho}\int\limits_{(F_e)} z_1\,dF = -\frac{E}{\varrho}\,S_e\,, \tag{1}$$

$$M = (F_0 k_0 + F_u k_u)\,\sigma_s + \frac{E}{\varrho}\int\limits_{(F_e)} z_1^2\,dF = (S_0 + S_u)\,\sigma_s + \frac{E}{\varrho}J_e\,, \tag{2}$$

Dabei sind F_0 und F_u die Querschnittsflächen der oberen und unteren plastischen Zonen, k_0 und k_u die Abstände ihrer Schwerpunkte von der neutralen Achse, S_0 und S_u die absoluten Werte der statischen Momente der plastischen Zonen in bezug auf die Nullachse, S_e das statische Moment der elastischen Zone, F_e und J_e die Querschnittsfläche und das Trägheitsmoment der elastischen Zone, ϱ der Krümmungsradius der neutralen Fläche und σ_s die Fließgrenze.

An der Grenze zwischen der elastischen und plastischen Zone muß die Spannung σ gleich σ_s sein. Folglich wird

$$\frac{E}{\varrho}\,z = \sigma_s\,. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1), (2) und (3) kann man für jede beliebige Querschnittsform die Lage der neutralen Achse, die Lage der Grenzen zwischen der elastischen und den plastischen Zonen (Abstand z) und die Krümmung der neutralen Fläche ermitteln, wenn das Biegungsmoment, die Werte σ_s und E und die Querschnittsmaße gegeben sind.

Auf Grund von (2) und (3) kann man den Zusammenhang zwischen $1/\varrho$ und M folgendermaßen darstellen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\,[J_e + (S_0 + S_u)\,z]}\,. \tag{4}$$

Wenn die plastische Zone nur auf einer Seite der neutralen Achse entstanden ist, dann muß man in den Gleichungen (1) und (2) F_0 und S_0 oder je nach den Umständen F_u und S_u gleich Null setzen. Die Gleichung (4) erhält hierbei folgende Form:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\,(J_e + S\,z)}\,, \tag{5}$$

wobei S die absolute Größe des statischen Momentes der oberen oder der unteren plastischen Zone ist.

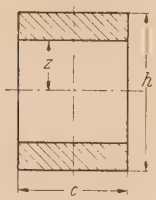


Abb. 3.

Für einen Querschnitt, der eine waagrechte Symmetrieachse hat, ist $F_0 = F_u$. Dann ist $S_e = 0$. Auf Grund von (1) geht die Nullachse in diesem Fall durch den Querschnittsschwerpunkt und die Gleichung (4) läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\,(J_e + 2\,S\,z)}\,. \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung, daß

$$J_e = \frac{2}{3}\,c\,z^3 \quad \text{und} \quad S = \frac{c}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

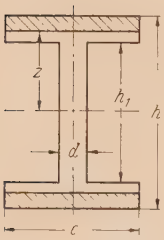


Abb. 4.

sind, findet man für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 3) auf Grund von (2), (3) und (6)

$$z = \sqrt{3\left(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{c\,\sigma_s}\right)}\,, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_f}{EJ\sqrt{3 - \frac{2\,M}{M_f}}}\,, \tag{8}$$

wobei J das Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts in bezug auf die neutrale Achse und $M_f = \frac{1}{6}\,c\,h^2\,\sigma_s$ das dem Fließbeginn in den Außenfasern entsprechende Moment ist.

Bei elastisch-plastischer Biegung eines Balkens mit Doppel-T-Querschnitt muß man zwei Fälle unterscheiden: die plastische Zone hat sich a) nur in den Flanschen, b) sowohl in den Flanschen als auch im Steg gebildet. Für den ersten Fall (Abb. 4) ist

$$J_e = \frac{2}{3}\,c\,z^3 - \frac{h_1^3}{12}\,(c - d)\,, \qquad S = \frac{c}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

Setzt man die erhaltenen Werte J_e und S in (2) ein und benützt (3), so erhält man folgende Gleichung dritten Grades zur Ermittlung von z:

$$z^3 - 3\left(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{c\,\sigma_s}\right)z + \frac{h_1^3}{4}\left(1 - \frac{d}{c}\right) = 0\,. \tag{9}$$

Daraus folgt

$$z = \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{M}{c\,\sigma_s}}\left(\cos\frac{\eta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\eta}{3}\right). \tag{10}$$

Hierbei ist

$$\eta = \arccos \frac{\frac{h_1^3}{8}\left(1 - \frac{d}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{c\,\sigma_s}\right)^3}}.$$

Die anderen beiden Lösungen der Gleichung (9) sind hier nicht anwendbar. Der Ausdruck für die Krümmung der Biegelinie ist auf Grund von (10) und (3)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_f}{EJ\sqrt{1 - \frac{M}{M'_s}}\left(\cos\frac{\eta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\eta}{3}\right)}, \tag{11}$$

wobei $M_f = \frac{2J}{h}\sigma_s$ das dem Fließbeginn in den äußersten Fasern entsprechende Moment und $M'_s = \frac{1}{4}c\,h^2\,\sigma_s$ ist.

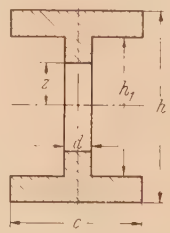


Abb. 5.

Wenn die plastische Zone sowohl in den Flanschen als auch in einem Teil des Steges entstanden ist (Abb. 5), so ist

$$J_e = \frac{2}{3}dz^3, \qquad S = \frac{c}{8}(h^2 - h_1^2) + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - z^2\right).$$

Setzt man die erhaltenen Werte J_e und S in (2) und (6) ein und benützt (3), so ergibt sich

$$z = \sqrt{3\left[\frac{c}{4d}(h^2 - h_1^2) + \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{M}{\sigma_s d}\right)\right]}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_f}{EJ\sqrt{A - \frac{2M}{M'_f}}}, \tag{13}$$

wobei

$$A = 3\left[\frac{c}{d}\left(1 - \frac{h_1^2}{h^2}\right) + \frac{h_1^2}{h^2}\right], \qquad M'_f = \frac{dh^2}{6}\sigma_s,$$

und J (ebenso wie im vorhergehenden Fall) das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts bezogen auf die neutrale Achse ist.

Die Momente M_f und M_f^c, die den Fließbeginn in den äußersten Querschnittsfasern und in den äußersten Fasern des Steges bestimmen, sind

$$M_f = \frac{\sigma_s}{6}\left[c\,h^2 - \frac{h_1^3}{h}(c - d)\right], \qquad M_f^c = \sigma_s\left[\frac{c}{4}(h^2 - h_1^2) + \frac{dh_1^2}{6}\right]. \tag{14}$$

Das Grenzmoment, bei dessen Wirkung die Plastizierung sich auf die ganze Querschnittsfläche ausbreiten würde, ist

$$M_s = \frac{\sigma_s}{4}\left[c(h^2 - h_1^2) + dh_1^2\right]. \tag{15}$$

Das Ausdruck (13) für die Krümmung gilt, wenn $M > M_f^c$ ist.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Werte $1/\varrho$ und z auch für andere Querschnittsformen ermitteln.

Jetzt entwickeln wir die allgemeinen Formeln zur Bestimmung der Formänderungen von Balken im elastisch-plastischen Zustand.

Wir setzen voraus, daß die Kurve AB (Abb. 6) einen Teil der Biegelinie eines Balkens ist, von welchem einige Abschnitte (z. B. AC) sich in elastischem, andere (z. B. CD) in elastisch-plastischem Zustand befinden.

Die Krümmung der deformierten Balkenachse für die elastischen Abschnitte ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}. \tag{16}$$

Für die elastisch-plastischen Abschnitte wird die Krümmung durch die Formeln (4) und (5) bestimmt. Wir nehmen an, daß die Formänderungen gering sind und daß die Koordinatenachse x

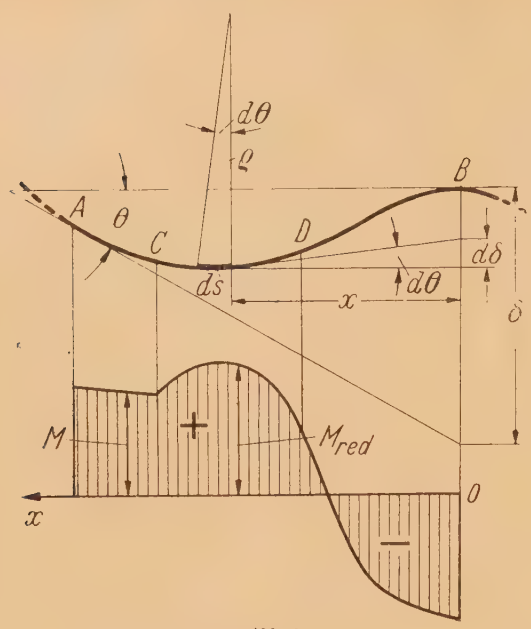


Abb. 6.

parallel zur ursprünglichen Balkenachse verläuft. Für Balkenabschnitte, die zwei plastische Bereiche haben, kann der Winkel $d\Theta$ zwischen den in zwei unendlich nahen Punkten der Kurve AB gezogenen Tangenten folgendermaßen dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} d\Theta &= \frac{ds}{\varrho} \approx \frac{dx}{\varrho} = \frac{M\,dx}{E\,[J_e + (S_0 + S_u)\,z]} \\ &= \frac{M\,dx}{EJ\,[k_e + (n_0 + n_u)\,z]}\,, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wobei J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts und

$$k_e = \frac{J_e}{J}\,, \quad n_0 = \frac{S_0}{J}\,, \quad n_u = \frac{S_u}{J}$$

ist.

Wenn die plastische Zone nur auf einer Seite entsteht, so ist

$$d\Theta = \frac{M\,dx}{E\,(J_e + S\,z)} = \frac{M\,dx}{EJ\,(k_e + n\,z)}\,, \tag{18}$$

wobei $n = S/J$ ist.

Für die elastischen Abschnitte ist

$$d\Theta = \frac{M\,dx}{EJ}\,.$$

Folglich läßt sich der Winkel Θ zwischen den Tangenten in den Punkten A und B für einen Balken mit konstantem Querschnitt folgendermaßen darstellen:

$$\Theta = \frac{1}{EJ}\left[\sum\int\limits_{(l_i)} M\,dx + \sum\int\limits_{(l_k')} \frac{M\,dx}{k_e + n\,z} + \sum\int\limits_{(l_k)} \frac{M\,dx}{k_e + (n_0 + n_u)\,z}\right] = \frac{1}{EJ}\,(F_e + F_k)\,, \tag{19}$$

wobei l_i die Länge eines der elastisch deformierten Balkenabschnitte, l_k' oder l_k die Länge eines der elastisch-plastisch deformierten Abschnitte ist.

Das in der Klammer stehende erste Glied stellt den Flächeninhalt F_e dar, der zwischen der Momentenkurve für die elastischen Teile und der x-Achse liegt. Die Summe des zweiten und des dritten Gliedes ist der Inhalt F_k der Fläche, die sich zwischen der reduzierten Momentenkurve auf den elastisch-plastischen Teilen und der x-Achse befindet.

Für diejenigen Abschnitte, innerhalb derer der plastische Bereich nur auf einer Seite der neutralen Fläche auftritt, sind die Ordinaten der reduzierten Momentenkurve gleich

$$\frac{M}{k_e + n\,z}\,. \tag{20}$$

Für Balkenabschnitte mit beiderseits der neutralen Fläche liegenden plastischen Bereichen gilt für diese Ordinate der Ausdruck

$$\frac{M}{k_e + (n_0 + n_u)\,z}\,. \tag{21}$$

Ferner ersieht man aus der Abb. 6, daß

$$d\delta = x\,d\Theta$$

ist. Daraus folgt

$$\delta = \frac{1}{EJ}\left[\sum\int\limits_{(l_i)} M\,x\,dx + \sum\int\limits_{(l_k')} \frac{M\,x\,dx}{k_e + n\,z} + \sum\int\limits_{(l_k)} \frac{M\,x\,dx}{k_e + (n_0 + n_u)\,z}\right] = \frac{1}{EJ}\,(S_e + S_k)\,. \tag{22}$$

Das erste in der Klammer stehende Glied stellt das statische Moment S_e der Momentenfläche der elastischen Teile in bezug auf die Vertikale durch den Punkt B dar[1].

Die Summe des zweiten und dritten Gliedes ist das statische Moment S_k der zwischen der reduzierten Momentenlinie auf den elastisch-plastischen Teilen und der x-Achse liegenden Fläche in bezug auf dieselbe Vertikale.

[1] Die ersten in der eckigen Klammer stehenden Glieder der Gl. (19) und (22) sind die bekannten Grundformeln des *Mohr*schen Verfahrens zur Untersuchung der Balkenformänderungen im elastischen Zustand.

Für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt lassen sich die Gleichungen (19) und (22) folgendermaßen darstellen:

$$\Theta = \frac{1}{EJ}\left[\sum \int_{(l_i)} M\,dx \pm \sum \int_{(l_k)} \frac{M_f\,dx}{\sqrt{3 \mp \frac{2M}{M_f}}}\right] = \frac{1}{EJ}(F_e + F_k)\,, \tag{23}$$

$$\delta = \frac{1}{EJ}\left[\sum \int_{(l_i)} M x\,dx \pm \sum \int_{(l_k)} \frac{M_f\,x\,dx}{\sqrt{3 \mp \frac{2M}{M_f}}}\right] = \frac{1}{EJ}(S_e + S_k)\,. \tag{24}$$

Die oberen Vorzeichen beziehen sich auf die Balkenabschnitte mit positiven und die unteren auf solche mit negativen Momentenwerten.

Für einen Balken mit Doppel-T-Querschnitt kann man die Werte für Θ und δ mit Hilfe von (11) und (13) wie folgt darstellen:

$$\left.\begin{aligned}\Theta = \frac{1}{EJ}\Bigg[\sum \int_{(l_i)} M\,dx \pm \sum \int_{(l_k')} \frac{M_f\,dx}{\sqrt{1 \mp \frac{M}{M'_s}\left(\cos\frac{\eta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\eta}{3}\right)}} \pm \sum \int_{(l_k)} \frac{M_f\,dx}{\sqrt{A \mp \frac{2M}{M_f'}}}\Bigg] \\ = \frac{1}{EJ}(F_e + F_k)\,,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta = \frac{1}{EJ}\Bigg[\sum \int_{(l_i)} M x\,dx \pm \sum \int_{(l_k')} \frac{M_f\,x\,dx}{\sqrt{1 \mp \frac{M}{M'_s}\left(\cos\frac{\eta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\eta}{3}\right)}} \pm \sum \int_{(l_k)} \frac{M_f\,x\,dx}{\sqrt{A \mp \frac{2M}{M_f'}}}\Bigg] \\ = \frac{1}{EJ}(S_e + S_k)\,.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Ermittlung der Integrale, die in den zweiten Gliedern der eckigen Klammer in (25) und (26) stehen, bietet große Schwierigkeiten.

Eine bedeutende Vereinfachung läßt sich erzielen, wenn man annimmt, daß die Krümmung der Achse eines Balkens mit Doppel-T-Querschnitt mit ausreichender Genauigkeit so lange nach den Formeln für elastische Biegung bestimmt werden kann, als der Fließvorgang sich nicht auf die ganze Höhe der Flanschen ausbreitet. Der Fehler in der Krümmungsgröße, der hierbei entsteht, ist äußerst gering, wie dies aus dem unten angegebenen Zahlenbeispiel zu ersehen ist.

Wir nehmen an, daß für den Querschnitt eines Trägers $h = 40$ cm, $c = 14{,}4$ cm, $d = 1{,}25$ cm und $h_1 = 36{,}7$ cm ist, und daß der Fließvorgang sich unter der Wirkung des Biegungsmomentes M auf die ganze Höhe der Flansche ausgedehnt hat. Setzt man $M = M_f^c$ ein, so erhält man auf Grund von (11) oder (13) folgenden Wert für die Krümmung in dem betrachteten Querschnitt

$$\frac{1}{\varrho} = 1235\,\frac{\sigma_s}{EJ}\,.$$

Der Näherungswert der Krümmung nach Formel (16) ist

$$\frac{1}{\varrho} = 1191\,\frac{\sigma_s}{EJ}\,.$$

Die Differenz macht im ganzen 3,6 v. H. aus. Bei weiterer Ausdehnung des Fließens in den Bereich des Steges wachsen die Differenzen in der Größe der Krümmung bei Ermittlung nach den Formeln der elastischen und der elastisch-plastischen Biegung rasch an.

Folglich kann in der Mehrzahl der Fälle die Bestimmung der Formänderungen der Balken mit Doppel-T-Querschnitt mit ausreichender Genauigkeit nach den vereinfachten Formeln vorgenommen werden, die man erhält, wenn man die zweiten in der eckigen Klammer stehenden Glieder in (25) und (26) vernachlässigt. Hierbei müssen die ersten Glieder in (25) und (26) nicht nur auf die elastisch deformierten Abschnitte, sondern auch auf die elastisch-plastisch gebogenen ausgedehnt werden, solange die plastische Zone nicht die Grenzen der Flanschen überschritten hat.

Es ist leicht zu ersehen, daß in diesem Fall die Formel (25) und (26) zur Bestimmung der Formänderungen der Balken mit Doppel-T-Querschnitt vollständig den Formeln (23) und (24) zur Bestimmung der Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt entsprechen.

Formeln nach Art der Gleichungen (23) und (24) sind sehr leicht auch auf andere Weise zu erhalten. Wir wollen voraussetzen, daß die Kurve AB (Abb. 7) einen Abschnitt der Biegelinie eines Kragträgers mit rechteckigem Querschnitt darstellt, der am Ende A eingespannt ist. Dabei befindet sich der Teil CD im elastischen, AC und DB im elastisch-plastischen Zustand. Der Punkt K ist ein Wendepunkt.

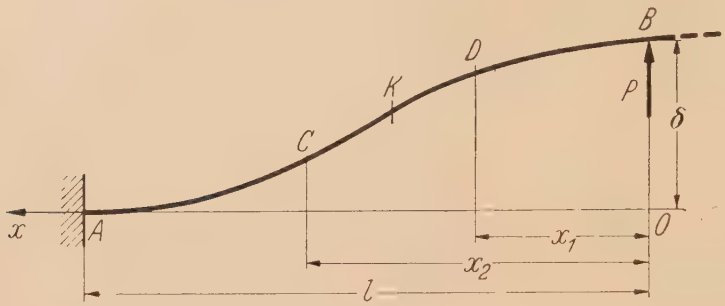


Abb. 7.

Wir bringen im Punkt B eine vertikale, gedachte Kraft P an. Die potentielle Energie U_k (Summe der elastischen Energie und der Energie der Restformänderungen) für den Abschnitt AB ist

$$U_k = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^{x_1} M_f^2\left(3-2\sqrt{3+\frac{2M}{M_f}}\right)dx + \int_{x_1}^{x_2} M^2\,dx + \int_{x_2}^{l} M_f^2\left(3-2\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}\right)dx\right]. \tag{27}$$

Wendet man den Satz von *Castigliano*[1] und die Formel von *Leibniz* für die Differentialquotienten eines Integrals mit den von dem Parameter P abhängigen Grenzen an, so ergibt sich

$$\delta = \left(\frac{\partial U_k}{\partial P}\right)_{P=0} = \frac{1}{EJ}\left\{-\int_0^{x_1}\frac{M_f\frac{\partial M}{\partial P}dx}{\sqrt{3+\frac{2M}{M_f}}} + \int_{x_1}^{x_2} M\frac{\partial M}{\partial P}dx + \int_{x_2}^{l}\frac{M_f\frac{\partial M}{\partial P}dx}{\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}} + \right.$$
$$+\frac{dx_1}{2dP}\left[M_f^2\left(3-2\sqrt{3+\frac{2M}{M_f}}\right)\right]_{x=x_1} - \frac{dx_1}{2dP}(M^2)_{x=x_1} +$$
$$\left. + \frac{dx_2}{2dP}(M^2)_{x=x_2} - \frac{dx_2}{2dP}\left[M_f^2\left(3-2\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}\right)\right]_{x=x_2}\right\}_{P=0}.$$

Die letzten vier Glieder des erhaltenen Ausdruckes heben sich paarweise auf, weil $M=M_f$ bei $x=x_2$ und $M=-M_f$ bei $x=x_1$ ist.

Berücksichtigen wir, daß für einen beliebigen Querschnitt $\partial M/\partial F = x$ ist, so erhalten wir die Formel (24). Wenn wir im Querschnitt B anstatt der Kraft P ein gedachtes Moment anbringen und in ähnlicher Weise vorgehen, so erhalten wir die Formel (23).

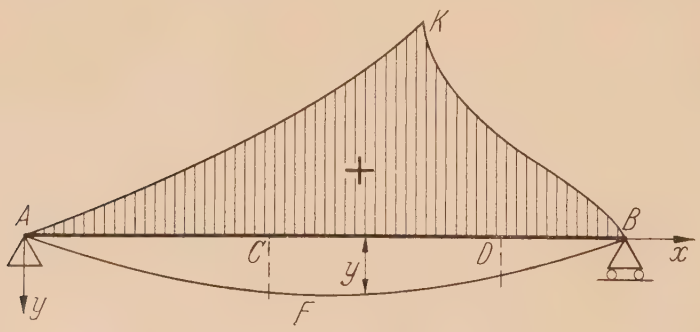


Abb. 8.

Für einen frei aufliegenden Balken ist es bequemer, die erhaltenen Ergebnisse etwas umzuformen. Es wird angenommen, daß die Teile AC und DB eines Balkens (Abb. 8) elastisch und CD elastisch-plastisch deformiert sind. Die Kurve AKB stellt eine reduzierte Momentenlinie dar.

Die Ordinaten der Momentenlinie für den Abschnitt CD sind

$$M_{\text{red}} = \frac{M}{k_e + 2nz}.$$

Wir setzen hierbei voraus, daß der Balkenquerschnitt auch eine horizontale Symmetrieachse hat. Außerdem nehmen wir an, daß die Kurve AFB eine Seilkurve ist, die mit dem Polabstand EJ für die als Belastung betrachtete Momentenfläche ermittelt wurde.

[1] Siehe die Arbeit des Verfassers im Ingenieur-Archiv 16 (1948) S. 221.

Die Differentialgleichung dieser Kurve für die Teile AC und DB ist

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M,$$

für den Teil CD

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{k_e + 2nz}. \tag{28}$$

Da die letzte Gleichung die Differentialgleichung der deformierten Achse eines Balkens im elastisch-plastischen Zustand ist, so ist klar, daß die Seilkurve AFB gleichzeitig die Biegelinie ist.

Das Produkt jeder Ordinate y dieser Kurve mit dem Polabstand EJ stellt das Biegungsmoment M' infolge der Momentenbelastung für den dieser Ordinate zugehörigen Querschnitt dar. Also wird

$$y = \frac{M'}{EJ}. \tag{29}$$

Man ersieht auch, daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q'}{EJ} \tag{30}$$

ist, wobei Q' die Querkraft für die Momentenbelastung bedeutet. Die Formeln (29) und (30) sind mit den entsprechenden Formeln der elastischen Biegung identisch.

Wir betrachten jetzt einige Fälle der Biegung von Balken mit rechteckigem Querschnitt.

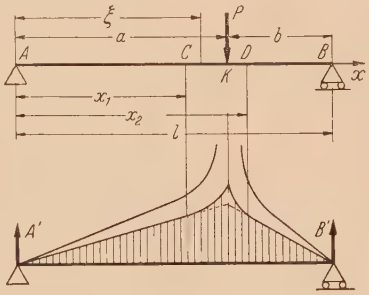


Abb. 9.

3. Elementare Biegungsfälle. a) Balken auf zwei Stützen mit einer unsymmetrisch wirkenden Einzellast[1] P. Die reduzierte Momentenfläche ist in Abb. 9 dargestellt. Setzt man die Ausdrücke für das Biegungsmoment auf der rechten und der linken Balkenhälfte gleich dem Moment M_f, so erhält man die Abstände x_1 und x_2 vom linken Auflager bis zu den Grenzen des elastisch-plastischen Bereichs des Balkens

$$x_1 = \frac{M_f l}{Pb}, \qquad x_2 = l\left(1 - \frac{M_f}{Pa}\right). \tag{31}$$

Wenn man die Auflagerkraft A' infolge der Momentenbelastung durch EJ dividiert, so erhält man auf Grund von (30) den Winkel α, den die Tangente an die Biegelinie am linken Auflager mit der x-Achse einschließt,

$$\begin{aligned}\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{A'}{EJ} &= \frac{1}{lEJ}\left\{\int_0^{x_1}\frac{Pb}{l}x(l-x)\,dx + \int_{x_1}^{a}\frac{M_f(l-x)\,dx}{\sqrt{3-\frac{2Pbx}{M_f l}}} + \right.\\ &\left. + \int_a^{x_2}\frac{M_f(l-x)\,dx}{\sqrt{3-\frac{2}{M_f}\left[\frac{Pb}{l}x - P(x-a)\right]}} + \int_{x_2}^{l}\left[\frac{Pb}{l}x - P(x-a)\right](l-x)\,dx\right\}\\ &= \frac{1}{EJ}\left\{\frac{M_f^2 l}{P}\left[\frac{5}{3}\frac{M_f}{P}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{3}{2b}\right] + 2M_f\sqrt{\frac{M_f l}{2P}}\left[\left(\frac{M_f}{Pb}-\frac{2}{3}-\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.-\frac{b}{3l}\right)\sqrt{\frac{3M_f l}{2Pb^2}-\frac{a}{b}} - \left(\frac{M_f}{Pa}+\frac{b}{3l}\right)\sqrt{\frac{3M_f l}{2Pa^2}-\frac{b}{a}}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{32}$$

Bezeichnet man mit P_f die Größe der Belastung, die den Fließbeginn in den äußersten Punkten des gefährdeten Querschnitts bestimmt und mit P_s die Grenzbelastung, die der Ausdednnng des Fließens auf die ganze Höhe dieses Querschnitts entspricht, so ergeben sich P_f und P_s aus den Gleichungen

$$\frac{P_f ab}{l} = M_f, \tag{33}$$

$$\frac{P_s ab}{l} = M_s = \frac{3}{2}M_f, \tag{34}$$

[1] Ein durch eine Einzelkraft symmetrisch belasteter Balken wurde von *J. Fritsche* mit Hilfe anderer Methoden behandelt. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931) S. 176; Bauingenieur 11 (1930) S. 855.

wobei $M_s = \frac{1}{4} c h^2 \sigma_s = \frac{3}{2} M_f$ das Moment ist, bei dessen Wirkung sich das Fließen auf die ganze Höhe des Querschnitts ausbreitet.

Substituiert man in (32) den Wert von M_f aus (33), so erhält man

$$\alpha_f = \frac{P_f b}{6 l EJ} (l^2 - b^2), \tag{35}$$

dabei ist α_f der der Kraft P_f zugehörige Winkel. Setzt man in (32) den Wert von M_f aus (34) ein, so erhält man

$$\alpha_s = \frac{4}{9} \frac{P_s a^2 b^2}{l EJ} \left[\frac{10 ab}{9 l} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{3}{2b} \right], \tag{36}$$

worin α_s der der Grenzbelastung P_s entsprechende Winkel ist. Wenn die Last in der Mitte des Balkens angreift, so wird

$$\alpha = \frac{M_f^2}{PEJ} \left(3 - 2 \sqrt{3 - \frac{Pl}{2 M_f}} \right), \tag{32'}$$

$$\alpha_f = \frac{P_f l^2}{16 EJ}, \tag{35'}$$

$$\alpha_s = \frac{P_s l^2}{12 EJ} = \frac{P_f l^2}{8 EJ}. \tag{36'}$$

In diesem Falle ist $\alpha_s = 2 \alpha_f$. Ersetzt man in (32) a durch b und umgekehrt, so erhält man die Formel für den Neigungswinkel der Tangente an die Biegelinie am rechten Auflager.

Auf Grund von (29) ist die Durchbiegung in dem Querschnitt unter der Kraft P

$$\left.\begin{aligned} \delta = \frac{1}{EJ} \left[A' a - \frac{P b x_1^2}{2 l} \left(a - \frac{2}{3} x_1 \right) - \int_{x_1}^{a} \frac{M_f (a - x) dx}{\sqrt{3 - \frac{2 P b x}{M_f l}}} \right] \\ - \frac{M_f}{EJ} \left\{ \frac{5}{3} \frac{M_f^2 l^2}{P^2 ab} - 2 \sqrt{\frac{M_f l}{2 P}} \left(\frac{M_f}{P} + \frac{ab}{3 l} \right) \left[\sqrt{\frac{3 M_f l}{2 P a^2}} - \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{3 M_f l}{2 P b^2}} - \frac{a}{b} \right] \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Durchbiegungen δ_f und δ_s, die den Belastungen P_f und P_s entsprechen, sind

$$\delta_f = \frac{P_f a^2 b^2}{3 l EJ}, \tag{38}$$

$$\delta_s = \frac{40 P_s a^2 b^2}{81 l EJ}. \tag{39}$$

Wenn die Kraft in der Mitte angreift, ist[1]

$$\delta = \frac{M_f^3}{3 P^2 EJ} \left[20 - \left(12 + \frac{Pl}{M_f} \right) \sqrt{3 - \frac{Pl}{2 M_f}} \right], \tag{37'}$$

$$\delta_f = \frac{P_f l^3}{48 EJ}, \tag{38'}$$

$$\delta_s = \frac{5 P_s l^3}{162 EJ} = \frac{5 P_f l^3}{108 EJ}. \tag{39'}$$

Auf diese Weise ergeben sich die Formeln der elastischen Biegung (35), (35'), (38) und (38') als Sonderfall der Formeln für die elastisch-plastische Biegung.

Die Gleichung der Biegelinie im Abschnitt CK ist

$$y = \frac{1}{EJ} \left[A' x - \frac{P b x_1^2}{2 l} \left(x - \frac{2}{3} x_1 \right) - \int_{x_1}^{x} \frac{M_f (x - \xi) d\xi}{\sqrt{3 - \frac{2 P b \xi}{l M_f}}} \right].$$

Im Abschnitt KD ist

$$y = \frac{1}{EJ} \left\{ A' x - \frac{P b x_1^2}{2 l} \left(x - \frac{2}{3} x_1 \right) - \int_{x_1}^{a} \frac{M_f (x - \xi) d\xi}{\sqrt{3 - \frac{2 P b \xi}{l M_f}}} - \int_{a}^{x} \frac{M_f (x - \xi) d\xi}{\sqrt{3 \quad \frac{2}{M_f} \left[\frac{P b}{l} \xi - P (\xi - a) \right]}} \right\}.$$

Jetzt untersuchen wir die Fläche, welche die plastischen Bereiche vom elastischen trennen. Setzt man die Momente des äußeren und der inneren Kräfte gleich, so erhält man eine allgemeine

[1] Diese Formel hat *J. Fritsche* auf anderem Wege gefunden. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931) S. 176, und Bauingenieur 11 (1930) S. 855.

Gleichung dieser Flächen für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt

$$M = \sigma_s c \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right), \tag{40}$$

wobei (z) die halbe Höhe der elastischen Zone ist, die dem Moment M entspricht. Da M nur von der Koordinate x abhängt, so stellt (40) bei beliebiger Belastung die Gleichung der zylindrischen Fläche mit zur Ebene der äußeren Kräfte senkrecht gerichteten Erzeugenden dar. Setzt man an Stelle von M dessen Werte für die linke und rechte Hälfte des betrachteten Balkens, so erhält man für die verschiedenen Werte von P zwei Scharen parabolischer Zylinder

$$z^2 + \frac{3\,P b\,x}{\sigma_s l c} - \frac{3\,h^2}{4} = 0, \tag{41}$$

$$z^2 - \frac{3\,P a\,x}{\sigma_s l c} + \frac{3\,P a}{\sigma_s c} - \frac{3\,h^2}{4} = 0, \tag{42}$$

Die Flächen (I) und (I') (Abb. 10) entsprechen der Belastung $P = P_f$, (II) und (II') der Belastung $P = P_s$.

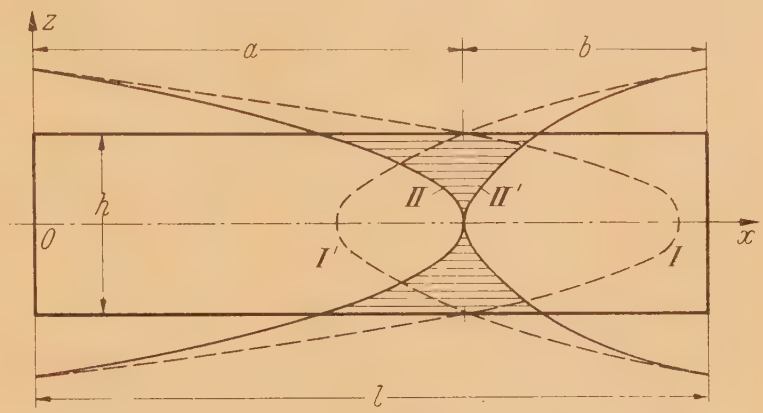


Abb. 10. Balken mit Einzellast. Grenzkurven zwischen dem elastischen und den plastischen Bereichen.

b) Balken auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Belastung. Setzt man das Biegungsmoment

$$M = \tfrac{1}{2}\,q\,l\,x - \tfrac{1}{2}\,b\,x^2$$

dem Moment M_f gleich, so erhält man die Abstände x_1 und x_2 vom linken Auflager bis zu den Grenzen des elastisch-plastischen Balkenabschnittes (Abb. 11)

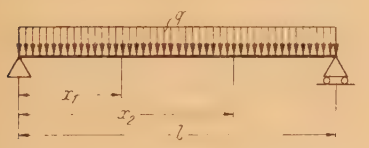


Abb. 11.

$$x_{1,2} = \frac{l}{2} \mp \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2\,M_f}{q}}. \tag{43}$$

Auf Grund von (23) und (24) ergeben sich der Winkel Θ, den die Tangente an die Biegelinie am Auflager mit der Waagerechten einschließt, und die Durchbiegung δ in der Mitte der Spannweite zu

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{EJ}\left[\int_0^{x_1}\left(\frac{q\,l}{2}\,x - \frac{q\,x^2}{2}\right)dx + \int_{x_1}^{l/2}\frac{M_f\,dx}{\sqrt{3\,\frac{q\,l}{M_f}\,x + \frac{q\,x^2}{M_f}}}\right] \\ &= \frac{1}{EJ}\left[\frac{q\,x_1^2}{12}\,(3\,l - 2\,x_1) + M_f\sqrt{\frac{M_f}{q}}\,\ln\frac{\sqrt{3 - \frac{q\,l^2}{4\,M_f}}}{1 - \sqrt{\frac{q\,l^2}{4\,M_f}} - 2}\right], \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EJ}\left[\int_0^{x_1}\left(\frac{q\,l}{2}\,x - \frac{q\,x^2}{2}\right)x\,dx + \int_{x_1}^{l/2}\frac{M_f\,x\,dx}{\sqrt{3\,\frac{q\,l}{M_f}\,x + \frac{q\,x^2}{M_f}}}\right] = \frac{1}{EJ}\left\{\frac{q\,x_1^3}{24}\,(4\,l - 3\,x_1) + \right. \\ &\left. + M_f\sqrt{\frac{M_f}{q}}\left[\sqrt{\frac{M_f}{q}}\left(\sqrt{3 - \frac{q\,l^2}{4\,M_f}} - 1\right) + \frac{l}{2}\,\ln\frac{\sqrt{3 - \frac{q\,l^2}{4\,M_f}}}{1 - \sqrt{\frac{q\,l^2}{4\,M_f}} - 2}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Die Belastung q_f, die dem Fließbeginn entspricht, und die Grenzbelastung q_s ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\frac{q_f\,l^2}{8} = M_f, \tag{46}$$

$$\frac{q_s\,l^2}{8} = \frac{3}{2}\,M_f. \tag{47}$$

Aus (43) ist zu ersehen, daß bei $q = q_f$, $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ ist. In diesem Falle ist der Neigungswinkel und die Durchbiegung bei der Belastung q_f auf Grund von (44) und (45)

$$\Theta_f = \frac{q_f l^3}{24\,E\,J}\,, \qquad \delta_f = \frac{5}{384}\,\frac{q_f l^4}{E\,J}\,.$$

Setzt man an Stelle von q die Grenzbelastung $q_s = 12\,M_f/l^2$ ein, so geht der Bruch

$$\frac{\sqrt{3 - \frac{q\,l^2}{4\,M_f}}}{1 - \sqrt{\frac{q\,l^2}{4\,M_f} - 2}}$$

in eine unbestimmte Form 0:0 über. Auf Grund eines bekannten Verfahrens ist

$$\lim_{q \to q_s} \left[\frac{\sqrt{3 - \frac{q\,l^2}{4\,M_f}}}{1 - \sqrt{\frac{q\,l^2}{4\,M_f} - 2}} \right] = \lim_{q \to q_s} \left[\frac{\sqrt{\frac{q\,l^2}{4\,M_f} - 2}}{\sqrt{3 - \frac{q\,l^2}{4\,M_f}}} \right] = \infty\,.$$

Auf diese Weise geht bei Wirkung der Grenzbelastung das zweite in eckigen Klammern in (44) und (45) stehende Glied ins Unendliche über. Da die anderen Summanden in (44) und (45) hierbei endliche Größen bleiben, so ist

$$\lim_{q \to q_s} \Theta = \infty\,, \qquad \lim_{q \to q_s} \delta = \infty\,.$$

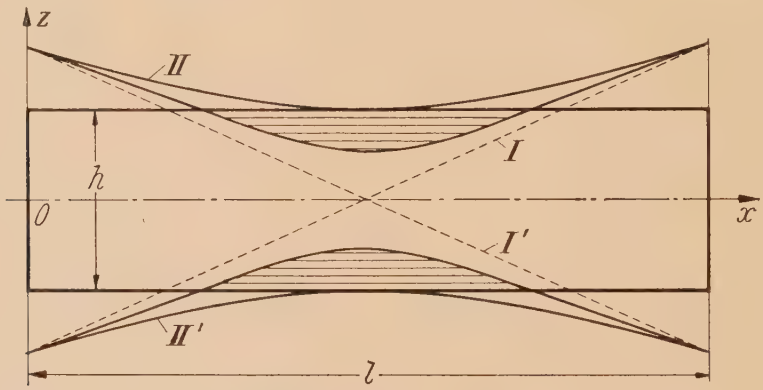


Abb. 12. Balken mit gleichmäßig verteilter Belastung. Grenzkurven zwischen dem elastischen und den plastischen Bereichen.

Natürlich haben die letzten Ergebnisse nur bedingten Wert, da die Formeln (23) und (24) nur für kleine Formänderungen anzuwenden sind. Es ist aber interessant zu bemerken, daß bei $q = 11{,}99\,M_f/l^2$, d. h. bei einer Belastung, die sich nur um 0,1 v. H. von der Grenzbelastung unterscheidet, die Durchbiegung

$$\delta = 0{,}0588\,\frac{q_f l^4}{E\,J} \tag{48}$$

ist.

Diese Durchbiegung ist noch sehr gering, obwohl sie die Durchbiegung unter der Belastung q_f um das 4,5fache übersteigt.

Die Gleichung der Schar der Grenzflächen zwischen dem elastischen und den plastischen Bereichen für die verschiedenen Werte von q ist auf Grund von (40)

$$z^2 - \frac{3\,q\,x^2}{2\,\sigma_s\,c} + \frac{3\,q\,l\,x}{2\,\sigma_s\,c} - \frac{3\,h^2}{4} = 0\,. \tag{49}$$

Die Flächen dieser Schar stellen hyperbolische Zylinder dar mit Erzeugenden, die senkrecht zur Zeichnungsebene stehen (Abb. 12). Bei der Grenzbelastung $q = q_s$ drückt diese Gleichung zwei sich schneidende Ebenen I und I' aus, deren Gleichungen lauten

$$z = \pm\,\frac{\sqrt{3}\,h}{l}\left(x - \frac{l}{2}\right). \tag{50}$$

Die Flächen II und II' entsprechen der Belastung[1] q_f.

[1] Vgl. *A. Nádai*, Der bildsame Zustand der Werkstoffe, S. 126. Berlin 1927.

In der nebenstehend folgenden Tabelle sind für eine Reihe von Belastungsfällen einige endgültige Ergebnisse zusammengestellt, die leicht mit Hilfe der Formeln (23), (24), (29) und (30) erhalten werden können. In der Tabelle sind folgende Bezeichnungen verwendet worden:

Θ der Neigungswinkel der Tangente an die Biegelinie am Ende der Konsole,

δ die Durchbiegung am Ende der Konsole oder in der Mitte der Spannweite bei einem an den Enden frei aufliegenden Balken,

Θ_1 und Θ_2 die Drehwinkel der Endquerschnitte am linken und rechten Auflager bei einem an den beiden Enden frei aufliegenden Balken,

Θ_s und δ_s die Grenzwinkel und Grenzdurchbiegungen,

P_f und q_f die Belastungswerte, die dem Fließbeginn in den gefährdeten Querschnitten entsprechen.

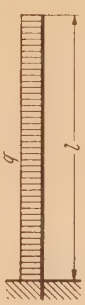
4. Einige Biegungsfälle, für die durch elementare Funktionen keine Lösung erhalten werden kann. Zu den im ersten Teil dieser Arbeit abgeleiteten Formeln (23), (24), (29) und (30) zur Bestimmung der Formänderungen ist folgendes zu bemerken: Die Werte der Formänderungen können in Elementarfunktionen nur dann erhalten werden, wenn das Biegungsmoment M eine Funktion ersten oder zweiten Grades der Koordinate x ist (konzentrierte Kräfte und Kräftepaare, gleichmäßig verteilte Belastung).

Wird das Veränderungsgesetz von M durch eine ganze algebraische Funktion von höherem als dem vierten Grade ausgedrückt, so führt die Ermittlung der Formänderungen des Balkens auf hyperelliptische Integrale.

Schließlich, wenn M durch eine ganze algebraische Funktion dritten oder vierten Grades von x ausgedrückt wird (dreieckige Belastung, parabolische Belastung zweiten Grades), so kann man die Lösung der Aufgabe durch elliptische *Legendre*sche Integrale erster und zweiter Gattung erhalten.

Einige Aufgaben der letzteren Art wollen wir im folgenden betrachten.

Formänderungswerte für einige Belastungsfälle.

		Θ	δ	Θ_s	δ_s
1		$\frac{M_f^2}{2PEJ}\left(3-2\sqrt{3-\frac{2Pl}{M_f}}\right)$	$\frac{M_f^3}{3P^2EJ}\left[5-\left(3+\frac{Pl}{M_f}\right)\sqrt{3-\frac{2Pl}{M_f}}\right]$	$\frac{P_f l^2}{EJ}$	$\frac{20P_f l^3}{27EJ}$
2		$\frac{M_f}{EJ}\sqrt{\frac{M_f}{q}}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}+\arcsin\left(l\sqrt{\frac{q}{3M_f}}\right)-\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$	$\frac{M_f^2}{2qEJ}\left[3-2\sqrt{3-\frac{ql^2}{M_f}}\right]$	$0{,}314\frac{q_f l^3}{EJ}$	$\frac{q_f l^4}{4EJ}$
3		$\Theta_1=\frac{M_f^3 l}{3m^2EJ}\left[\frac{9m}{2M_f}-5+\sqrt{\left(3-\frac{2m}{M_f}\right)^3}\right]$ $\Theta_2=\frac{M_f^3 l}{3m^2EJ}\left[5-\left(3+\frac{m}{M_f}\right)\sqrt{3-\frac{2m}{M_f}}\right]$	$\frac{M_f^3 l^2}{6m^2EJ}\left[\frac{9m}{2M_f}-5-\sqrt{\left(3-\frac{2m}{M_f}\right)^3}\right]-\frac{ml^2}{48EJ}$	$\frac{7M_f l}{27EJ}$ $\frac{20M_f l}{27EJ}$	$\frac{85M_f l^2}{864EJ}$

a) Konsole mit dreieckiger Belastung. Das Biegungsmoment in einem beliebigen Querschnitt x und der Abstand x_1 (Abb. 13) bis zum Anfang des elastisch-plastischen Teiles sind

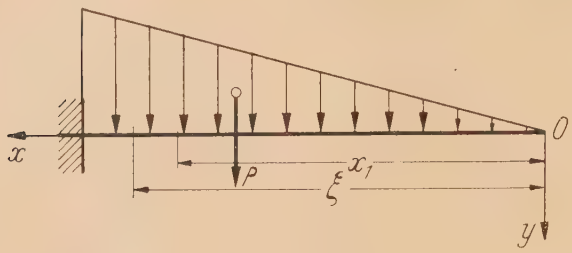


Abb 13.

$$M = \frac{P x^3}{3 l^2}, \tag{51}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{3 M_f l^2}{P}}. \tag{52}$$

Der Neigungswinkel der Tangente an die Biegelinie am Ende der Konsole ist nach Formel (23) des ersten Teiles

$$\Theta = \frac{1}{EJ}\left(\int_0^{x_1} \frac{P x^3}{3 l^2}\, dx + \int_{x_1} \frac{M_f\, dx}{\sqrt{3 - \frac{2 P x^3}{3 M_f l^2}}}\right) = \frac{1}{EJ}\left(\int_0^{x_1} \frac{P x^3 dx}{3 l^2} + M_f l \sqrt{\frac{3 M_f}{2 P}} \int_{x_1}^{l} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9 M_f l^2}{2 P} - x^3}}\right). \tag{53}$$

Das zweite in der Klammer stehende Integral ist ein elliptisches Integral erster Gattung.

Wir verwenden die Substitution

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 M_f l^2}{2 P}}\left(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right). \tag{54}$$

Dann ist

$$\frac{9 M_f l^2}{2 P} - x^3 = \frac{27 M_f l^2}{2 P}\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin^2\varphi\right]\frac{\mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}}, \tag{55}$$

und der Winkel Θ ergibt sich in elliptischen *Legendre*schen Integralen erster Gattung zu

$$\Theta = \frac{M_f}{EJ}\sqrt[3]{\frac{M_f l^2}{2 P}}\left\{\frac{\sqrt[3]{6}}{4} - \frac{1}{\sqrt[12]{3}}\left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\right]\right\}. \tag{56}$$

Hier und im folgenden benützen wir die bekannten Bezeichnungen für die *Legendre*schen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung

$$F(\varphi_1, k) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \tag{57}$$

$$E(\varphi_1, k) = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi. \tag{58}$$

Der Modul des Integrals ist $k^2 = 0{,}933$. Die Amplituden φ_1 und φ_2 ergeben sich aus (54), wenn man dort x durch x_1 und l ersetzt, zu

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt[6]{\frac{4}{243}}} = 30^\circ\, 10', \tag{59}$$

$$\varphi_2 = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{1 - l \sqrt[3]{\frac{2 P}{9 M_f l^2}}}\right). \tag{60}$$

Die Last P_f, die dem Anfange des Fließvorganges in der Einspannungsstelle entspricht, und die Grenzbelastung P_s, bei der die Tragfähigkeit des Balkens erschöpft wird, ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{P_f l}{3} = M_f, \tag{61}$$

$$\frac{P_s l}{3} = M_s = \frac{3}{2} M_f, \tag{62}$$

wobei M_s das Moment ist, das der Plastizierung des ganzen Querschnitts entspricht.

Bei $P = P_f$ ist $\varphi_2 = \varphi_1$, und der Neigungswinkel nach (56) wird

$$\Theta_f = \frac{P_f l^2}{12 EJ}. \tag{63}$$

Bei $P = P_s$ ist $\varphi_2 = 0$, und das erste in (56) in der Klammer stehende Integral verschwindet. Der dem Modul des zweiten Integrals entsprechende Winkel ergibt sich zu 75^0.

Nach den Tabellen für die elliptischen Integrale findet man

$$F(\varphi_1, k) = 0{,}550.$$

Die Größe Θ_s des Neigungswinkels bei der Wirkung der Grenzbelastung ergibt sich jetzt leicht aus (56) zu

$$\Theta_s = 0{,}102 \frac{P_s l^2}{EJ} = 0{,}153 \frac{P_f l^2}{EJ}. \tag{64}$$

Die Durchbiegung am Ende des Balkens ist auf Grund der Formel (24)

$$\delta = \frac{1}{EJ}\left(\int_0^{x_1} \frac{P x^4}{3 l^2} dx + \int_{x_1}^{l} \frac{M_f x\, dx}{\sqrt{3 - \frac{2 P x^3}{3 M_f l^2}}}\right) = \frac{1}{EJ}\left(\int_0^{x_1} \frac{P x^4}{3 l^2} dx + M_f l \sqrt{\frac{3 M_f}{2 P}} \int_{x_1}^{l} \frac{x\, dx}{\sqrt{\frac{9 M_f l^2}{2 P} - x^3}}\right). \tag{65}$$

Das in Klammern stehende elliptische Integral zweiter Gattung kann man auch mit Hilfe von (54) in die *Legendre*sche Normalform überführen. Endgültig ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \delta = \frac{M_f l}{EJ} \sqrt[3]{\frac{M_f^2 l}{P^2}} \Bigg(\frac{\sqrt[3]{9}}{5} + \frac{3\sqrt[12]{3}}{\sqrt[3]{4}} \Bigg\{ 2 \Big[\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2}\, \mathrm{tg} \frac{\varphi_2}{2} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}\, \mathrm{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \\ - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k)\Big] + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\big[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\big]\Bigg\}\Bigg). \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Bei $P = P_s$ ist $\varphi_1 = \varphi_2$, und die Durchbiegung wird

$$\delta_f = \frac{P_f l^3}{15 EJ}. \tag{67}$$

Bei $P = P_f$ ist $\varphi_2 = 0$ und $E(\varphi_1, k) = 0{,}503$, und die Durchbiegung für die Grenzbelastung wird

$$\delta_s = 0{,}0847 \frac{P_s l^3}{EJ} = 0{,}127 \frac{P_f l^3}{EJ}. \tag{68}$$

Man ersieht, daß Θ und δ bei der Wirkung der Grenzbelastung P_s ungefähr doppelt so groß sind als bei der Wirkung der Belastung P_f. Die Formeln (63) und (67) sind die bekannten Ausdrücke für die Durchbiegung und den Neigungswinkel bei rein elastischer Biegung des Balkens.

Die Gleichung der Biegelinie für den elastisch-plastischen Teil des Balkens lautet

$$y = \int_x^l \frac{M_f (\xi - x)\, d\xi}{EJ \sqrt{3 - \frac{2 P \xi^3}{3 M_f l^2}}}. \tag{69}$$

Dabei ist $l \geqq \xi \geqq x$ und $x > x_1$.

Die Gleichung der Schar der Grenzflächen zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich ist

$$z^2 + \frac{P x^3}{c \sigma_s l^2} - \frac{3 h^2}{4} = 0, \tag{70}$$

wobei z die halbe Höhe des elastischen Kerns im Querschnitt ist, der der Koordinate x entspricht.

b) Balken auf zwei Stützen mit dreieckiger Belastung. Setzt man das Biegemoment

$$M = \frac{P}{3} x - \frac{P x^3}{3 l^2}$$

dem Moment M_f gleich, so erhält man die Gleichung

$$x^3 - l^2 x + \frac{3 M_f l^2}{P} = 0, \tag{71}$$

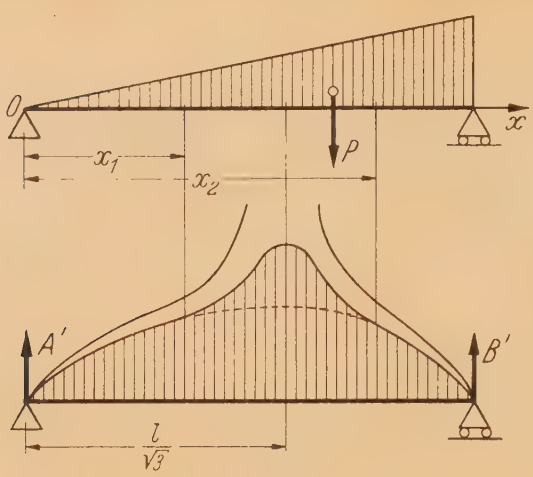


Abb. 14.

aus der sich die Abstände x_1 und x_2 (Abb. 14) von der linken Stütze bis zu den Grenzen des elastisch-plastischen Teiles ergeben zu

$$x_{1,2} = \frac{l}{\sqrt{3}} \cos\frac{\eta}{3} \mp l \sin\frac{\eta}{3}, \tag{72}$$

wobei

$$\cos\eta = \frac{9\sqrt{3}\, M_f}{2\,P\,l}$$

ist. Die dritte Lösung der Gleichung (71),

$$x_3 = -\frac{2\,l}{\sqrt{3}} \cos\frac{\eta}{3},$$

ist hierbei nicht verwendbar. In Abb. 14 ist unten die reduzierte Momentenlinie dargestellt.

Für den Neigungswinkel α der Tangente zur Biegelinie an der linken Stütze erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha = \frac{A'}{EJ} &= \frac{1}{EJl}\left[\int_0^{x_1} M(l-x)\,dx + \int_{x_2}^{l} M(l-x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f(l-x)\,dx}{\sqrt{3-\frac{2\,M}{M_f}}}\right] \\
&= \frac{1}{EJl}\left\{\int_0^{x_1}\left(\frac{P}{3}x - \frac{P\,x^3}{3\,l^2}\right)(l-x)\,dx + \int_{x_2}^{l}\left(\frac{P}{3}x - \frac{P\,x^3}{3\,l^2}\right)(l-x)\,dx + \right. \\
&\left. + M_f\,l\sqrt{\frac{3\,M_f}{2\,P}}\left[l\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + \frac{9\,M_f\,l^2}{2\,P}}} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + \frac{9\,M_f\,l^2}{2\,P}}}\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Wir führen die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, die in eckigen Klammern stehen, auf die *Legendre*sche Normalform über. Der Ausdruck unter der Wurzel läßt sich mit Hilfe von Hyperbelfunktionen folgendermaßen darstellen:

$$x^3 - l^2x + \frac{9\,M_f\,l^2}{2\,P} = \left(x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\psi}{3}\right)\left[x^2 - \frac{2\,x\,l}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\psi}{3} + \frac{l^2}{3}\left(\mathfrak{Cof}^2\frac{\psi}{3} + 3\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\psi}{3}\right)\right].$$

Dabei ist

$$\mathfrak{Cof}\,\psi = \frac{27\sqrt{3}\,M_f}{4\,P\,l}.$$

Ferner benützen wir die Substitution

$$x = -\frac{2\,l}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\psi}{3} + l\,R\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}, \tag{74}$$

wobei

$$R = \sqrt{3\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\psi}{3} + \mathfrak{Sin}^2\frac{\psi}{3}}$$

ist. Dann wird

$$x^3 - l^2x + \frac{9\,M_f\,l^2}{2\,P} = l^3\,R^3\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{R}\,\mathfrak{Cof}\frac{\psi}{3}\right)\sin^2\varphi\right]\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sec^4\frac{\varphi}{2},$$

und nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + \frac{9\,M_f\,l^2}{2\,P}}} = \frac{1}{\sqrt{l\,R}}\left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\right],$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + \frac{9\,M_f\,l^2}{2\,P}}} &= \sqrt{l\,R}\left\{2\left[R_2\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} - R_1\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k)\right] + \right. \\
&\left. + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}\,R}\,\mathfrak{Cof}\frac{\psi}{3}\right)\left[F(\varphi_2, k) - F_1(\varphi_1, k)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$R_1 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}\,, \qquad R_2 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2}\,.$$

Der Modul der Integrale ist

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{R}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}\right).$$

Die Amplituden φ_1 und φ_2 ergeben sich aus (74) durch Ersatz von x durch x_1 und x_2.

Dann erhält man nach (74) und (72)

$$\varphi_{1,2} = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\eta}{3} \mp \sin\frac{\eta}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}}\right).$$

Durch Einsetzen der gefundenen Werte der elliptischen Integrale in (73) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha = {} & \frac{P}{EJl}\left\{\frac{7l^3}{180} + \frac{1}{3}\left[\frac{l}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{4l}(x_2^4 - x_1^4) + \right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{1}{5l^2}(x_1^5 - x_2^5)\right]\right\} - \frac{M_f l}{EJ}\sqrt{\frac{3 M_f R}{2 P l}}\left\{2\left[R_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} - R_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right.\right. \\ & \left.\left. - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k)\right] + \left[1 - \frac{1}{R}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}\right)\right]\left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Auf ähnliche Weise können auch die Tangente des Neigungswinkels β am rechten Auflager und die Durchbiegung δ an der Stelle von $M_{\max}$ (im Abstand $x = l/\sqrt{3}$ von der linken Stütze) in *Legendre*schen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta = {} & \frac{1}{EJl}\left(\int_0^{x_1} M x\,dx + \int_{x_2}^{l} M x\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f x\,dx}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_f}}}\right) = \frac{P}{EJl}\left\{\frac{2}{45}l^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x_1^3 - x_2^3) + \frac{1}{5l^2}(x_2^5 - x_1^5)\right]\right\} + \frac{M_f}{EJ}\sqrt{\frac{3 M_f l R}{2P}}\left\{2\left[R_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} - R_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right.\right. \\ & \left.\left. - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k)\right] + \left(1 - \frac{2}{R\sqrt{3}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}\right)\left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\right], \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta = {} & \frac{1}{EJ}\left[A'\frac{1}{\sqrt{3}} - \int_0^{x_1} M\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - x\right)dx - \int_{x_1}^{l/\sqrt{3}} \frac{M_f\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - x\right)dx}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_f}}}\right] = \frac{P}{EJ\sqrt{3}}\left\{\frac{7l^3}{180} + \frac{1}{3}\times\right. \\ & \times\left[\frac{x_2^3 + x_1^3(\sqrt{3} - 1)}{3} - \frac{l x_2^2}{2} + \frac{x_2^4}{4l} + \frac{x_1^5(1 - \sqrt{3}) - x_2^5}{5l^2}\right]\Bigg\} + \frac{M_f l}{EJ}\sqrt{\frac{M_f l R}{2P}}\times \\ & \times\left\{2\left[\sqrt{3}\,R_3 \operatorname{tg}\frac{\varphi_3}{2} - R_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} + (1 - \sqrt{3})\,R_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} - \sqrt{3}\,E(\varphi_3, k) + E(\varphi_2, k) + \right.\right. \\ & \left. + (\sqrt{3} - 1)\,E(\varphi_1, k)\right] + \left[\sqrt{3} - \frac{1}{R}\left(1 + 2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}\right)\right]\left[F(\varphi_3, k) - F(\varphi_1, k)\right] + \\ & \left. + \left[\frac{1}{R}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}\right) - 1\right]\left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\right]\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Dabei ist

$$\varphi_3 = 2 \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + 2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}\right)}\right\},$$

$$R_3 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_3}\,.$$

Setzt man das maximale Biegemoment

$$M_{\max} = \frac{2Pl}{9\sqrt{3}}$$

den Momenten M_f und $M_s = \frac{3}{2} M_f$ gleich, so erhält man die Belastung, die dem Anfang des Fließvorganges entspricht, und die Grenzbelastung

$$P_f = \frac{9\sqrt{3}\,M_f}{2\,l}, \tag{78}$$

$$P_s = \frac{27\sqrt{3}\,M_f}{4\,l}. \tag{79}$$

Bei $P = P_f$ ist $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, und aus (75), (76) und (77) ergeben sich leicht die bekannten Werte der Formänderungen für rein elastische Biegung des Balkens

$$tg\,\alpha_f = \frac{7}{180}\,\frac{P_f\,l^2}{E\,J}, \qquad \operatorname{tg}\beta_f = \frac{2}{45}\,\frac{P_f\,l^2}{E\,J}, \qquad \delta_f = \frac{P_f\,l^3}{45\sqrt{3}\,EJ}.$$

Wir betrachten jetzt den Fall der Wirkung der Grenzbelastung. Für $P = P_s$ ergibt sich aus (72)

$$x_1 = 0{,}279\,l, \qquad x_2 = 0{,}831\,l.$$

Weiter erhalten wir

$$\mathfrak{Cof}\,\psi = 1, \qquad \psi = 0, \qquad \mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3} = 1, \qquad \mathfrak{Sin}\,\frac{\psi}{3} = 0.$$

Den Ausdruck unter der Wurzel in (73) kann man folgendermaßen darstellen:

$$x^3 - l^2\,x + \frac{9\,M_f\,l^2}{2\,P_s} = \left(x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Dann artet das elliptische Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f\,(l-x)\,dx}{\sqrt{3 - \frac{2\,M}{M_f}}},$$

das in (73) steht, in ein uneigentliches pseudoelliptisches Integral

$$J_1 = M_f\,l\sqrt{\frac{3\,M_f}{2\,P_s}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(l-x)\,dx}{\sqrt{\left(x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

aus, dessen Integrand bei $x = 1\sqrt{3}$ den Wert ∞ erhält. Nach einer bekannten Methode ergibt sich

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{(l-x)\,dx}{\sqrt{\left(x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \left\{ \int_{x_1}^{\left(\frac{l}{\sqrt{3}} - \varepsilon\right)} \frac{(l-x)\,dx}{\left(\frac{l}{\sqrt{3}} - x\right)\sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}}} + \int_{\left(\frac{l}{\sqrt{3}} + \varepsilon\right)}^{x_2} \frac{(l-x)\,dx}{\left(x - \frac{l}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}}} \right\}$$

$$= \lim_{(\varepsilon \to 0)} \left\{ \left[2\sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}} + \sqrt[4]{\frac{l^2}{3}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln \frac{\sqrt[4]{3\,l^2} + \sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}}}{\sqrt[4]{3\,l^2} - \sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}}} \right]_{x_1}^{\left(\frac{l}{\sqrt{3}} - \varepsilon\right)} + \right.$$

$$\left. + \left[-2\sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}} + \sqrt[4]{\frac{l^2}{3}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln \frac{\sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}} - \sqrt[4]{3\,l^2}}{\sqrt{x + \frac{2\,l}{\sqrt{3}}} + \sqrt[4]{3\,l^2}} \right]_{\left(\frac{l}{\sqrt{3}} + \varepsilon\right)}^{x_2} \right\} = \infty.$$

Man kann in ähnlicher Weise beweisen, daß das uneigentliche pseudoelliptische Integral

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f\,x\,dx}{\sqrt{3 - \frac{2\,M}{M_f}}},$$

das sich aus (76) mit $P = P_s$ ergibt, ebenfalls einen unendlich großen Wert hat.

Das in (77) stehende Integral

$$J_3 = \int_{x_1}^{l/\sqrt{3}} \frac{M_f\left(\frac{l}{\sqrt{3}} - x\right) dx}{\sqrt{3 - \frac{2\,M}{M_f}}}$$

hat eine endliche Größe.

Daraus folgt:

$$\lim_{P \to P_s} \operatorname{tg} \alpha = \infty\,, \qquad \lim_{P \to P_s} \operatorname{tg} \beta = \infty\,, \qquad \lim_{P \to P_s} \delta = \infty\,. \tag{80}$$

Natürlich haben die Ergebnisse (80) nur bedingten Wert im Hinblick auf die Überlegungen, die bei der Behandlung des Balkens mit gleichmäßiger Belastung angestellt wurden.

Man kann die Ergebnisse (80) auch in anderer Weise erhalten, wenn man die Werte $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ und δ, die in (75), (76) und (77) in ausführlicher Form angegeben sind, für den Grenzfall untersucht. Für $P = P_s$ ist $k^2 = 1$ und die Amplituden sind

$$\varphi_1 = 84^\circ 32'\,, \quad \varphi_2 = 93^\circ\, 52' \quad \text{und} \quad \varphi_3 = 90^\circ\,.$$

Die Differenz der elliptischen Integrale

$$F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\,,$$

die in (75), (76) und (77) steht, artet in diesem Falle in ein uneigentliches pseudoelliptisches Integral aus:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \left(\int_{\varphi_1}^{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \int_{\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \right) = \infty\,.$$

Die Faktoren bei diesem Integral und auch alle anderen Glieder in (75), (76) und (77) haben bei $P = P_s$ endliche Werte, ausgenommen das Produkt

$$\left[\sqrt{3} - \frac{1}{R}\left(1 + 2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\psi}{3}\right)\right]\left[F(\varphi_3, k) - F(\varphi_1, k)\right],$$

das die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt.

Die Untersuchung des Grenzwertes dieser unbestimmten Form führt zu Null und wir erhalten wiederum die Bedingungen (80).

(Eingegangen am 28. Oktober 1947.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Waldemar Swida*, (17a) Karlsruhe, Stuttgarter Straße 21.

Über eine Formel für Gleichdruckgebläse.

Von W. Richter.

1. Einleitung[1]. Von *F. Schicht*[2] sind Gleichdruckgebläse entwickelt worden, mit denen man Druckziffern erreicht, die bedeutend höher liegen als die der Axialgebläse üblicher Bauart mit ungefähr gleichem Wirkungsgrad. Ein wesentlicher Vorteil des Gleichdruckgebläses liegt in seiner billigen Herstellung. Das *Schicht*-Gebläse erzeugt einen verlangten Druck mit kleinerer Umfangsgeschwindigkeit als ein anderes Axialgebläse. Man kann es bei gegebener Drehzahl deshalb im Durchmesser und Gewicht kleiner halten[3]. Außerdem macht es wegen der kleineren Umfangsgeschwindigkeit weniger Lärm. Der *Schicht*sche Patentanspruch ist dadurch gekennzeichnet, daß zwischen der Tangentenneigung an die Laufradschnitte (abgewickelte Zylinderschnitte) und den durch die Berührungspunkte der Tangenten gehenden Kanalquerschnitten (Radialschnitte) des Laufrades eine durch eine Näherungsformel in der Patentschrift angegebene Beziehung gefordert wird. Im folgenden soll diese Beziehung hergeleitet werden.

2. Gleichdruck auf einer Zylinderfläche im Laufrad. In einer früheren Arbeit[4] habe ich folgende Aufgabe behandelt: Mit der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_0$ trete ein Teilchen in ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse A rotierendes Laufrad ein. Die Relativbahn und daher auch die Absolutbahn liege während des Durchgangs durchs Laufrad ganz auf der Drehfläche Φ, deren Achse A ist und deren Meridiankurve die ebene Kurve K sei. Die absolute Eintrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_0$ liege in einer Tangentialebene an diese Drehfläche Φ. Während des Durchgangs durch das Laufrad sei der Druck konstant, und das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit sei eine lineare Funktion der auf dem Meridian K der Drehfläche Φ gemessenen Kurvenlänge $\mathfrak{l}$. Die Komponenten der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ und der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ wurden ermittelt und damit die Absolutbahn und die Relativbahn bestimmt.

Besonders einfach werden die Ergebnisse, wenn die absolute Eintrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_0$ parallel zur Laufradachse A und die Drehfläche Φ ein Drehzylinder Z ist. Ihr Meridian ist dann die Gerade, auf der $\mathfrak{c}_0$ liegt. Anstatt der Kurvenlänge $\mathfrak{l}$ tritt der parallel zur Laufradachse A gemessene Abstand x auf, den das bewegte Teilchen von der durch den Eintrittspunkt 0 normal zur Laufradachse A gelegten Ebene hat. Der Halbmesser dieses Zylinders sei R. Beim Durchgang durch das Laufrad hat das bewegte Teilchen daher stets den Abstand R von der Laufradachse. Seine Führungsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ist deshalb konstant, liegt stets in einer Tangentialebene des Zylinders Z und steht normal zur Laufradachse A.

Zwischen den Vektoren der Absolutgeschwindigkeit $\boldsymbol{c}$, der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ und der Führungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ besteht die Gleichung

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{w} + \mathfrak{u}\,, \tag{1}$$

wobei

$$u = R \cdot \omega$$

ist.

Wenn folgende Annahmen getroffen werden:

(A) Absolutbahn und Relativbahn liegen auf einem Zylinder Z mit der Achse A und dem Halbmesser R,

(B) $c^2 = 2\,a\,x + c_0^2$ $(a > 0 \ldots$ konstant),

dann ergeben sich für die zur Laufradachse A parallelen Komponenten c_x bzw. w_x und für die zu ihr normalen, in einer Tangentialebene an den Zylindern liegenden Komponenten c_y bzw.

---

[1] Die Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen verdanke ich wiederholten Gesprächen mit Herrn *F. Schicht* in Außig.

[2] *F. Schicht*, „Achsialgebläse oder -pumpe zum Fördern von Gasen oder Flüssigkeiten", Reichspatentamt. Patentschrift Nr. 633 155, Kl. 27c, Gr. 701 vom 5. Mai 1933.

[3] *E. Sörensen*, Z. VDI., 83 (1939), S. 925.

[4] *W. Richter*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 422.

w_y der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ bzw. der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} c_x &= \sqrt{c_0^2 + 2\,a\,x - \frac{a^2 x^2}{R^2 \omega^2}}\,, \qquad c_y = -\frac{a\,x}{R\omega}\,, \\ w_x &= \sqrt{c_0^2 + 2\,a\,x - \frac{a^2 x^2}{R^2 \omega^2}}\,, \qquad w_y = R\omega - \frac{a\,x}{R\omega}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wird der Zylinder Z in eine Ebene abgewickelt, so erhält man als Abwicklung der Relativbahn einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$\xi = \frac{R^2 \omega^2}{a}\,, \qquad \eta = -\frac{R\omega}{a}\,c_0$$

hat, und dessen Halbmesser

$$\varrho = \frac{R\omega}{a}\,w_0$$

ist.

Für den Winkel α, den die Relativbahn in jedem ihrer Punkte mit der hindurchgehenden Erzeugenden des Zylinders Z einschließt, folgt daher

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_y}{w_x} = \frac{R\omega - \frac{a\,x}{R\omega}}{\sqrt{c_0^2 + 2\,a\,x - \frac{a^2 x^2}{R^2 \omega^2}}}\,. \tag{3}$$

Bedeuten c_e den Betrag der absoluten Austrittsgeschwindigkeit, mit der das Laufrad verlassen wird, und t die achsiale Tiefe des Laufrades, so ergibt die Annahme (B) für die Konstante a den Wert

$$a = \frac{c_2^2 - c_0^2}{2\,t}\,.$$

Nun werde die weitere Annahme getroffen:

(C) in jedem Radialschnitt (ebener Schnitt durchs Laufrad normal zur Laufradachse) sei die zur Laufradachse parallele Komponente c_a der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ für alle Stromfäden gleich groß.

Für jedes x ist diese Komponente c_a gleich dem für $c_x = w_x$ in (2) für den Grundzylinder Z gefundenen Wert. Bezeichnet Q die in der Zeiteinheit durch einen Radialschnitt des Laufrades strömende konstante Menge, so folgt aus

$$Q = F c_x \tag{4}$$

wegen (2)

$$c_x^2 = \frac{Q^2}{F^2} = c_0^2 + 2\,a\,x - \frac{a^2 x^2}{R^2 \omega^2}$$

oder

$$Q^2\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F_0^2}\right) = 2\,a\,x - \frac{a^2 x^2}{R^2 \omega^2}\,.$$

Wird die für positive x stets positive Größe

$$C = \frac{Q^2}{2\,\omega}\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F_0^2}\right) \tag{5}$$

eingeführt, so erhält man als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{a\,x}{R\omega}\right)^2 - 2\left(\frac{a\,x}{R\omega}\right) R\omega + 2\,\omega\,C = 0$$

den Ausdruck

$$\frac{a\,x}{R\omega} = R\omega - \sqrt{R^2\omega^2 - 2\,\omega\,C}\,. \tag{6}$$

Wegen $C = 0$ für $F = F_0$ und $x = 0$ hat die Quadratwurzel in (6) das negative Zeichen.

Damit erhält man für (3) die Form

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{R^2\omega^2 - 2\,\omega\,C}}{\sqrt{c_0^2 + Q^2\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)}} = \frac{F}{Q}\sqrt{R^2\omega^2 - 2\,\omega\,C}\,.$$

Zwischen dem Winkel α und der Fläche F des Radialschnittes, von der ja C abhängig ist, besteht also die Beziehung[1]

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{Q} R\omega \sqrt{1 - \frac{2C}{R^2\omega}}. \tag{7}$$

Zur Herleitung von (7) ist es nicht nötig, für die Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ die Annahme (B) zu machen. Gleichung (7) drückt nämlich nur aus, daß in jedem Augenblick die Absolutbeschleunigung normal zur Relativgeschwindigkeit steht, was zur Folge hat, daß, wenn der ganze Stromfaden auf einem Zylinder liegt, der Betrag der Relativgeschwindigkeit beim Durchgang durch das Laufrad konstant bleibt, daß also weder eine Beschleunigung noch eine Verzögerung der Relativbewegung eintritt. Das ist aber die Voraussetzung für Gleichdruck, wenn die Bahn auf dem Zylinder Z liegen soll.

Gleichung (7) gilt auch für andere als in der Annahme (B) angegebene Veränderlichkeiten der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$. Natürlich gelten dann nicht mehr die Gleichungen (2), und die abgewickelte Relativbahn ist dann kein Kreis.

Wird die Wurzel in (7) in eine Potenzreihe entwickelt, die konvergiert, weil wegen $c_x \leqq w_0$ sicher $\left|\frac{2C}{R^2\omega}\right| \leqq 1$ ist, so erhält man

$$\sqrt{1 - \frac{2C}{R^2 w}} = 1 - \frac{C}{R^2\omega} - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{R^2\omega}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{R^2\omega}\right)^3 - \frac{5}{8}\left(\frac{C}{R^2\omega}\right)^4 - \cdots.$$

Durch Abbrechen nach dem zweiten Glied ergibt sich für (7) die Näherungsformel

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{Q} R\omega \left(1 - \frac{C}{R^2\omega}\right), \tag{7a}$$

die etwas zu große Werte liefert.

Wird (6) in der Form

$$\frac{a\,x}{R\omega} = R\omega\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2C}{R^2\omega}}\right)$$

geschrieben, darin die Wurzel wie oben in eine Potenzreihe entwickelt und diese nach dem zweiten Gliede abgebrochen, so erhält man

$$\frac{a\,x}{R\omega} = \frac{C}{R},$$

womit (3) in

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R\omega - \frac{C}{R}}{\sqrt{\frac{Q^2}{F_0^2} + 2\omega C - \frac{C^2}{R^2}}} = \frac{R^2\omega - C}{\sqrt{\frac{Q^2}{F^2}R^2 - C^2}} \tag{7b}$$

übergeht. Diese Formel ist die im Stammpatent enthaltene Beziehung[2] zwischen α und Q.

Man kann (7b) auch in der Form

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{Q} R\omega \frac{1 - \frac{C}{R^2\omega}}{\sqrt{1 - \left(\frac{CF}{QR}\right)^2}}$$

schreiben. Wird hier der Nenner in eine Potenzreihe entwickelt und der Bruch ausdividiert, so erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{Q} R\omega \left(1 - \frac{C}{R^2\omega}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{CF}{QR}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{CF}{QR}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{CF}{QR}\right)^6 + \cdots\right].$$

Daraus ist zu ersehen, daß die Näherungsformel (7b) etwas größere Werte als (7a) ergibt. Die Größenordnung der Unterschiede zeigt das im vierten Abschnitt durchgeführte Beispiel.

3. Das *Schicht*sche Gleichdruckgebläse. Wird in (7) R durch einen anderen Wert r ersetzt, so ergibt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{Q} r\omega \sqrt{1 - \frac{2C}{r^2\omega}} \tag{8}$$

eine Beziehung zwischen den Winkeln α, unter welchen eine auf einem Zylinder mit dem Halbmesser r liegende Kurve in jedem ihrer Punkte die Zylindererzeugende schneidet, und dem

[1] Zum gleichen Ergebnis kommt auch *E. Sörensen* in einer schriftlichen Mitteilung an *F. Schicht*.
[2] Nach Mitteilung von *F. Schicht* hat bei der Herleitung dieser Formel *E. Trefftz* mitgewirkt.

Flächeninhalt F des zugehörigen Radialschnittes. Dieser Festlegung liegt die Annahme zugrunde, daß

(D) in einer gewissen Umgebung des Grundzylinders, dessen Halbmesser R war, die Teilchen sich angenähert auf Zylindern mit dem Halbmesser r bewegen.

Auf diesen Zylindern ist die Gleichdruckbedingung nicht mehr erfüllt, weil im Ausdruck für c_x der Halbmesser R des Grundzylinders auftritt und damit der Verlauf der Flächeninhalte F der Radialschnitte bestimmt wurde, wovon wieder die in (8) auftretende Größe C abhängt.

Beim *Schicht*schen Gleichdruckgebläse wird anstatt (8) die aus (7b) hervorgehende Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r^2 \omega - C}{\sqrt{\frac{Q^2}{F^2} r^2 - C^2}} \tag{8a}$$

verwendet.

Zur Bestimmung der Schaufelform für das Laufrad gibt es zwei völlig gleichberechtigte Wege, auf die die Patentschrift auch ausdrücklich hinweist.

Erster Weg: Auf dem Grundzylinder wird eine entsprechende Kurve als Schaufelschnitt gewählt. Diese Kurve ist noch weitgehend willkürlich. Durch ihre Wahl ist das Gesetz für die Abhängigkeit des Quadrates der Absolutgeschwindigkeit c von x festgelegt und kann daraus z. B. graphisch mit Hilfe der Hodographen für die Absolutbewegung und die Relativbewegung ermittelt werden. Insbesondere erhält man die Annahme (B), wenn der Grundschaufelschnitt bei der Verebnung des Grundzylinders zu einem Kreisbogen wird, aus dem man a und c_0 bestimmen kann, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω willkürlich vorgegeben wird. Mit diesen so ermittelten Konstanten ergibt (2) den Verlauf von c_x und daher (4) für eine gegebene Menge Q den Verlauf von F. Die Formen der Nabe und der festen Begrenzung des Laufradkanals sind nun so zu wählen, daß die Fläche jedes Radialschnittes den jeweils ihr zugehörigen Wert von F annimmt und daß der Grundzylinder tatsächlich Träger eines Stromfadens wird. Das ist sicher der Fall, wenn entweder die feste Begrenzung des Laufradkanals oder die Nabe dieser Grundzylinder selber ist. Für jeden andern Zylinder mit dem Halbmesser r ergibt (8) die Winkel, unter denen der auf ihm liegende Schaufelschnitt die Zylindererzeugenden schneidet.

Zweiter Weg: Es kann ein entsprechender Verlauf des Laufradkanals weitgehend willkürlich gewählt werden. Dadurch ist die Fläche F des Radialschnitts als Funktion von x bestimmt. Auf einem Grundzylinder mit dem Halbmesser R, auf dem nach der Form des Laufradkanals ein Stromfaden zu vermuten ist, wird durch (7) der Grundschaufelschnitt bestimmt. Die auf anderen Zylindern liegenden Schaufelschnitte liefert dann wieder (8).

Wie aus den Scharen der Schaufelschnitte, die ja nur bis auf Drehungen um die Laufradachse bestimmt sind, die Laufradschaufel selbst aufgebaut wird, entscheiden Festigkeits- und Fertigungsüberlegungen.

Besonders bewährt hat sich der Laufradkanal, dessen feste Begrenzung den Grundzylinder selbst bildet, weil in dessen unmittelbarer Nähe die Strömung noch nicht zu weit von Zylinderflächen abweicht und des großen Halbmessers wegen dort ein beträchtlicher Teil der Menge Q hindurchströmt.

Durch Zerschneiden der Laufradschaufeln — bis fünfreihige Laufräder wurden ausgeführt, für höhere Druckziffern bürgerten sich zweireihige ein — und gestaffeltes Versetzen der einzelnen Stücke gegeneinander auf dem Laufradumfang hat man gute Erfolge erzielt.

4. Beispiel. Die Eintrittsgeschwindigkeit $c_0 = 2$ m/s sei parallel zur Drehachse und wachse bei der achsialen Tiefe $t = 0{,}10$ m des Laufrades gemäß der Bedingung (B) auf den Wert $c_e = 4$ m/s an. Daraus ergibt sich die Konstante $a = 60$ m/s^2. Der Halbmesser des Grundzylinders sei $R = 0{,}40$ m. Die Drehung geschehe mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10$ s^{-1}. Wenn in der Zeiteinheit die Menge $Q = 0{,}8$ m^3/s durch das Laufrad strömen soll, so ist durch (2) der Verlauf von c_x und damit für jedes x die Fläche F des zugehörigen Radialschnittes gegeben. Abb. 1 zeigt drei Möglichkeiten, den Laufradkanal zu gestalten. Bei A ist die Nabe Grundzylinder, bei B bilden die mittleren Kreise der Radialschnitte den Grundzylinder, und bei C ist die feste Außenwand des Laufradkanals Grundzylinder. Diese letzte Form wird in der Praxis bevorzugt.

Der Schaufelschnitt auf dem Grundzylinder ist durch (7) oder (7a) bzw. (7b) bestimmt. In Abb. 2 wurden alle drei Formeln benützt, um den Grad der Näherung zu zeigen. Über der

Abb. 1. Drei Möglichkeiten für die Form des Laufradkanals.
A ... Nabe ist Grundzylinder.
B ... Mittlere Kreise der Radialschnitte liegen auf dem Grundzylinder.
C ... Gehäuse ist Grundzylinder.

der Formel (7) entsprechenden Kurve I liegt die der Formel (7a) entsprechende Kurve II und noch über dieser die der Formel (7b) entsprechende Kurve III.

In Abb. 3 ist schließlich die Schar der Schaufelschnitte nach (8) für verschiedene r gezeichnet. Diese Abwicklungen der zylindrischen Schaufelschnitte sind keine Kreise. Für $1 < 2\, C/r^2\omega$ gibt

(8) keine reellen Werte für tg α mehr. Die entsprechenden Endpunkte der Schaufelschnitte liegen jedoch außerhalb der aus Abb. 1 ersichtlichen, für die Konstruktion des Laufrades notwendigen Bereiche. Die in Abb. 3 gestrichelt gezeichnete Kurve A (C) begrenzt den Bereich, der für die in Abb. 1 A (C) angegebene Form des Laufradkanals gebraucht wird.

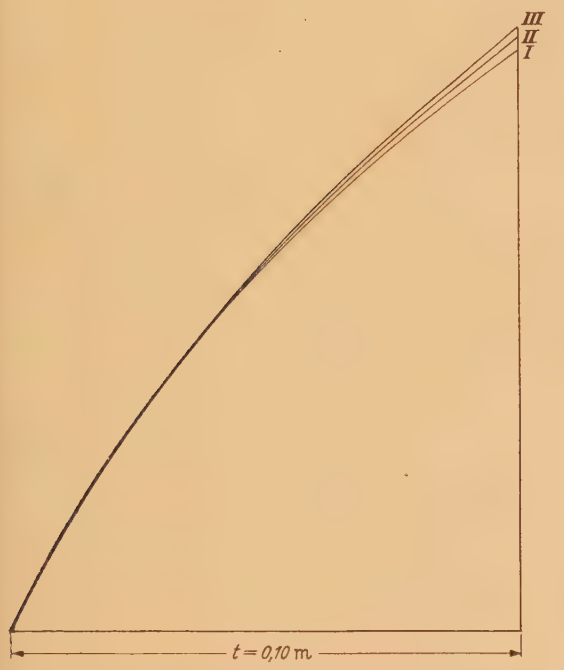


Abb. 2. Schaufelschnitt auf dem Grundzylinder (R = 0,40 m).
Kurve I ... Formel (7).
Kurve II ... Formel (7a)
Kurve III ... Formel (7b)

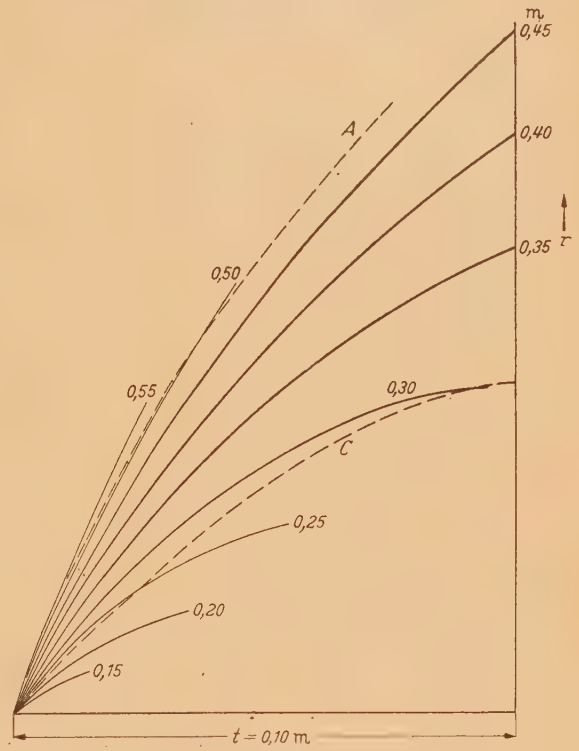


Abb. 3 Abgewickelte Schaufelschnitte auf Zylindern mit verschiedenen Halbmessern r nach Formel (8).

5. Zusammenfassung. Von einigen einer früheren Arbeit entnommenen Formeln ausgehend, wurde die eindimensionale stationäre Gleichdruckströmung entlang eines Stromfadens angegeben, der sich ganz auf einem gleichförmig um seine Achse rotierenden Zylinder befindet. Als Ergebnis wurde eine Beziehung zwischen der Fläche des Radialschnittes durch einen Punkt und zwischen dem Winkel erhalten, unter dem die Zylindererzeugende im betreffenden Punkte von der Relativbahn geschnitten wird. Für diese Beziehung wurden zwei Näherungen angegeben, von denen die eine bei der Konstruktion der *Schicht*-Gebläse verwendet wird. Durch eine rein formale Erweiterung der für diesen Grundzylinder gefundenen Ergebnisse wurde ein Verfahren erhalten, nach dem diejenigen Kurven ermittelt werden können, in denen die Laufradschaufel eine beliebige mit ihr koachsiale Drehzylinderfläche schneidet.

Es wurde gezeigt, daß beim *Schicht*-Gebläse von einem weitgehend willkürlich angenommenen zylindrischen Schaufelschnitt oder von einer weitgehend willkürlich gewählten Form des Laufradkanals ausgehend die Schaufelform ermittelt werden kann.

Gleichdruck herrscht im Laufrad genau nur auf einer der mit dem Laufrad koachsialen Drehzylinderflächen unter den bei den Herleitungen als solche gekennzeichneten Annahmen für eine verlustlose Strömung um unendlich dünne Schaufeln.

(Eingegangen am 29. November 1947; das Manuskript lag in ähnlicher Fassung schon am 21. August 1944 vor, ist jedoch in der Druckerei verbrannt.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Wilhelm Richter*, (22a) Duisburg, Karl-Lehr-Straße 2.

Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen.

(II. Mitteilung)

Von **F. Riegels.**

1. Einleitung. Die klassische theoretische Hydro- und Aerodynamik behandelt das Umströmungsproblem der ebenen inkompressiblen Potentialströmung meist durch konforme Abbildung. Vom Standpunkt des Ingenieurs aus ist es aber anschaulich und vielfach auch zweckmäßig, das Strömungsfeld um einen Körper aus einfachen Singularitäten auf der Oberfläche oder im Innern des Körpers aufzubauen. Beschränkt man sich auf schlanke Körperformen, so vereinfacht sich das Problem dadurch erheblich, daß nurmehr eine Singularitätenverteilung längs einer geraden Strecke von der Länge der größten Sehne des Körpers nötig ist. *Birnbaum, Glauert, Munk* u. a. haben diese Methode mit Erfolg bei dünnen ebenen und gewölbten Platten, wobei nur Wirbelverteilungen auftreten, benutzt. Eine Erweiterung auf Körper endlicher Dicke ist durch Hinzunahme von Quellverteilungen möglich. In einigem Abstand vom Körper konnten *Pistolesi*[1] und *Keune*[2] auf diese Weise das Strömungsfeld angeben. Die Ausdehnung der Theorie auf die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung am Körper selbst gelang aber erst in den letzten Jahren durch Arbeiten von *Helmbold* und *Keune*[3] und des Verfassers[4]. Da diese letzteren Arbeiten teilweise nicht veröffentlicht sind und die Theorie durch den Verfasser inzwischen noch etwas ausgebaut wurde, sei ein kurzer Bericht über den gegenwärtigen Stand dieser Methode gegeben. Bezüglich des grundlegenden symmetrischen Problems sei dabei auf die kürzlich an dieser Stelle[5] gegebene ausführliche Darstellung hingewiesen.

2. Grundlösung für die ebene Wirbelschicht auf einer geraden Strecke von der Länge l. Die x-Achse sei von $x=-l/2$ bis $x=+l/2$ mit Wirbeln belegt. Die von dieser Wirbelverteilung $\gamma(x)$ erzeugten Geschwindigkeiten w_y normal zur x-Achse (positiv nach oben) lauten

$$w_y = +\frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\gamma(x')}{x'-x}\,dx' . \tag{1}$$

Bei vorgegebenen Normalgeschwindigkeiten liefert diese Integralgleichung die Zirkulationsverteilung $\gamma(x)$. Zu ihrer Bestimmung ist es zweckmäßig und übersichtlich, die belegte Strecke durch die einfache konforme Abbildung

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{l^2/4}{\zeta}\right) \tag{2}$$

auf einen Kreis abzubilden und in der ζ-Ebene statt in der z-Ebene zu rechnen. Mit $\zeta=(l/2)\,e^{i\varphi}$ ergibt sich für den Übergang auf den Kreiswinkel φ die Beziehung

$$x = \frac{l}{2}\cos\varphi . \tag{3}$$

Die Geschwindigkeit w_y normal zur Platte geht dann über in die Geschwindigkeit w_r normal zum Kreise

$$w_r = w_y\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = w_y \sin\varphi .^{6} \tag{4}$$

Damit führt die oben vorliegende Aufgabe, die Zirkulationsverteilung zu bestimmen, auf die bekannte Randwertaufgabe der Potentialtheorie am Kreise. Normal- und Tangentialgeschwin-

---

[1] *E. Pistolesi*, Acta Pont. Acad. Scient. 1 (1937) S. 57.

[2] *F. Keune*, Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung I S. 3.

[3] *H. B. Helmbold* u. *F. Keune*, Beiträge zur Profilforschung. Lufo 20 (1943) S. 77 und *F. Keune*, Aerodynamische Berechnung systematischer Flügelprofile. Techn. Ber. 11 (1944), (nicht veröffentlicht).

[4] *F. Riegels* u. *H. Wittich*, Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen. Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung I S. 120, und

F. Riegels, Techn. Ber. 10 (1943) S. 13 (nicht veröffentlicht).

[5] *F. Riegels*, Ing.-Arch. 16 (1948) S. 373.

[6] $\sin\varphi$ schreiben wir absichtlich ohne Betragstriche und bringen damit zum Ausdruck, daß w_r im Intervall $0<\varphi<\pi$ am Kreise nach innen, im Intervall $\pi<\varphi<2\pi$ nach außen gerichtet ist, falls w_y eine Abwärtsgeschwindigkeit ist.

digkeiten am Kreise können danach aufgefaßt werden als Imaginär- und Realteil ein und derselben — außerhalb des Kreises regulären — analytischen Funktion. Bei vorgegebenen Normalgeschwindigkeiten w_r am Kreise lauten die zugehörigen Tangentialgeschwindigkeiten

$$w_\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_r \operatorname{ctg}\frac{\varphi'-\varphi}{2}\, d\varphi' + \text{const.} \tag{5}$$

Schreiben wir vor, daß bei $x=l/2$, das ist bei $\varphi=0$, ein Staupunkt liegen bzw. glatter Abfluß herrschen soll ($w_\varphi=0$), so ist die Konstante durch den negativen Wert des Integrals bei $\varphi=0$ bestimmt. Es ergibt sich dann

$$w_\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_r\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi'-\varphi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi'}{2}\right) d\varphi' . \tag{6}$$

Gehen wir umgekehrt wie in (4) auf die x-Achse zurück und führen wir w_r aus (4) ein, so erhalten wir

$$w_x = -\frac{w_\varphi}{\sin\varphi} \tag{7}$$

$$= +\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_y \sin\varphi'\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi'-\varphi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi'}{2}\right) d\varphi' . \tag{7a}$$

Diese Gleichung liefert uns wegen

$$\gamma = 2\, w_x \tag{8}$$

die gesuchte Wirbelverteilung.

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die entsprechenden, im Schrifttum bekannten Lösungen in x angegeben[1]. Sie lauten

$$\gamma(x) = -\frac{2}{\pi\sqrt{1-\left(\frac{2x}{l}\right)^2}}\int_{-l/2}^{+l/2}\frac{w_y(x')\sqrt{1-\left(\frac{2x'}{l}\right)^2}}{x'-x}\, dx' . \tag{9}$$

In diesem allgemeinen, der Gleichung (5) entsprechenden Fall geht $\gamma(x)$ bei $x=-l/2$ sowohl als auch bei $x=+l/2$ nach unendlich. Um bei $x=l/2$ einen Staupunkt zu erhalten, muß eine weitere Zirkulation überlagert werden. Damit ergibt sich der interessantere Fall mit verschwindender Wirbelstärke bei $x=l/2$:

$$\gamma(x) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}}\int_{-l/2}^{+l/2} w_y(x')\sqrt{\frac{l+2x'}{l-2x'}}\,\frac{dx'}{x'-x} . \tag{10}$$

Die Identität beider Darstellungen folgt ohne weiteres, wenn man beachtet, daß ganz allgemein die Beziehungen

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi'-\varphi}{2} = -\frac{\sin\varphi'+\sin\varphi}{\cos\varphi'-\cos\varphi} , \tag{11}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\operatorname{ctg}\frac{\varphi'-\varphi}{2}\, d\varphi' = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi')\,\frac{\sin\varphi'\, d\varphi'}{\cos\varphi'-\cos\varphi}\ [\text{für } f(\varphi) = -f(2\pi-\varphi)] , \tag{12}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\operatorname{ctg}\frac{\varphi'-\varphi}{2}\, d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi')\,\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'-\cos\varphi}\ [\text{für } f(\varphi) = f(2\pi-\varphi)] \tag{13}$$

gelten. Ist nämlich w_y in (1) als an der x-Achse stetige Abwärtsgeschwindigkeit gegeben, so ist $f(\varphi)=w_y\sin\varphi'=w_r$ eine in bezug auf $\varphi=0$ und π ungerade Funktion, und aus (12) folgt unter Beachtung von (3) die Identität der beiden allgemeinen Lösungen (5, 7, 8) und (9).

---

[1] Vgl. z. B. *A. Betz*, Beiträge zur Tragflügeltheorie. Diss. Göttingen 1919, oder *Fuchs-Hopf*, Aerodynamik, Bd. II. Berlin 1935.

Zum Schluß dieser allgemeinen Betrachtungen wollen wir noch anmerken: Wird $f(\varphi)$ speziell in Gestalt von *Fourier*-Reihen gegeben, so wird insbesondere aus (12) und (13)

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\nu\varphi'\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi'-\varphi}{2}\,d\varphi'=+\sin\nu\varphi\,, \tag{14}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\nu\varphi'\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi'-\varphi}{2}\,d\varphi'=-\cos\nu\varphi\,. \tag{15}$$

3. Die Strömung um ebene und gewölbte Platten. Bekanntlich erhält man die Umströmung von Platten (Körper der Dicke Null) auf einfache Weise, indem man einer Wirbelverteilung eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit V überlagert. Die Wirbelverteilung wird dabei auf einer geraden Strecke in Richtung der Parallelströmung, die die x-Achse unter einem Winkel α anströmen möge, angenommen. Wenn wir kleine Winkel α der Parallelströmung gegen die Körpersehne voraussetzen, so können wir die Wirbelverteilung näherungsweise auf der x-Achse ansetzen. Bei einer solchen Überlagerung bezeichne w_y die von der Wirbelverteilung erzeugte Normalkomponente der Geschwindigkeit an der x-Achse. Die Bedingung der glatten Umströmung erfordert dann die Beziehung

$$\frac{w_y+V\sin\alpha}{V\cos\alpha}=\frac{dy^{(s)}}{dx} \tag{16}$$

oder linearisiert für kleine α

$$\frac{w_y}{V}+\alpha=\frac{dy^{(s)}}{dx}\,, \tag{17}$$

wenn $y^{(s)}$ die Plattenordinaten bedeuten und $y^{(s)}(-l/2)=y^{(s)}(+l/2)=0$ vorausgesetzt ist. Für die mit dem Stück $-l/2\leqq x\leqq+l/2$ der x-Achse zusammenfallende ebene Platte unter dem Anstellwinkel α gilt $dy^{(s)}/dx=0$, also $w_y=-\alpha V$, womit aus (7a) und (8) und mit (15) die bekannte Zirkulationsverteilung der ebenen Platte folgt:

$$\gamma_a=2\,V\alpha\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=2\,V\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}=2\,V\alpha\sqrt{\frac{l-2\,x}{l+2\,x}}\,. \tag{18}$$

Für Platten mit kleiner Wölbung beim Anstellwinkel $\alpha=0$ gilt wegen (17) und (3)

$$w_y=V\frac{dy^{(s)}}{dx}=V\frac{dy^{(s)}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{2\,V}{l}\,\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{dy^{(s)}}{d\varphi}\,, \tag{19}$$

womit aus (7a) und (8) als Zirkulationsverteilung für eine beliebig gewölbte Platte mit den Ordinaten $y^{(s)}$ folgt:

$$\gamma_b=-\frac{4\,V}{l\sin\varphi}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dy^{(s)}}{d\varphi'}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi'-\varphi}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi'}{2}\right)d\varphi'\,. \tag{20}$$

Zu dieser Gleichung muß bemerkt werden, daß über die Wirbelstärke an der Vorderkante keinerlei Voraussetzung gemacht ist. Im allgemeinen werden daher an der Vorderkante unendliche große Geschwindigkeiten auftreten. Durch Überlagerung eines Anstellwinkelgliedes nach (18) läßt sich die Wirbelstärke hier immer zu Null machen. Den dazu erforderlichen Anstellwinkel nennt man den Anstellwinkel des „stoßfreien Eintritts". (Nähere Ausführungen hierzu in Abschnitt **6.**)

Die Geschwindigkeitsverteilung W über die Tiefe der Platte ergibt sich wegen der vorausgesetzten kleinen Wölbung durch lineare Superposition:

$$W=V\pm\frac{\gamma_a}{2}\pm\frac{\gamma_b}{2}\,, \tag{21}$$

wobei das obere Zeichen für die Ober-, das untere Zeichen für die Unterseite der Platte gilt.

4. Die Strömung um symmetrische Körper endlicher Dicke. Bei symmetrischer Umströmung, d. h. für die Anströmungskomponente $V\cos\alpha$ wurde dieser Fall eingehend in der erwähnten früheren Mitteilung I behandelt. Die zur Körperkontur normale Komponente der Anströmungsgeschwindigkeit wurde dabei durch eine näherungsweise konforme Abbildung auf die x-Achse transformiert. Im Intervall $-l/2\leqq x\leqq+l/2$ ergab sich so die Quellbelegung

$$q_c(x)=2\,V\cos\alpha\,\frac{dy^{(t)}}{dx} \tag{22}$$

mit $y^{(t)}$ als Ordinaten des symmetrischen Körpers. Die von dieser Quellverteilung erzeugten Geschwindigkeiten an der x-Achse

$$w_{xc} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{q_c(x')}{x'-x}\, dx' \tag{23}$$

$$= -V \cos\alpha \frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy^{(t)}}{dx'} \frac{dx'}{x'-x} \tag{24}$$

werden mit Hilfe derselben Näherung auf die Körperkontur zurückgerechnet. Dort werden sie als zusätzliche Tangentialkomponenten zur tangentialen Komponente der Anströmungsgeschwindigkeit $V \cos\alpha \cos\chi = V \cos\alpha/\sqrt{1+y'^2}$ addiert. Es ergibt sich als Geschwindigkeit am Körper

$$W = (V \cos\alpha + w_{xc}) \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\,. \tag{25}$$

Es wurde dabei bewiesen, daß die so erhaltene Geschwindigkeitsverteilung mit der durch exakte konforme Abbildung erhaltenen übereinstimmt, wenn man die letztere nach einem Dickenparameter entwickelt und nur die linearen Glieder dieser Entwicklung berücksichtigt.

Bei unsymmetrischer Umströmung erfordert die Erfüllung der Randbedingungen für die Strömungskomponente $V \sin\alpha$ weitere Überlegungen. Grundsätzlich könnte man natürlich genau so vorgehen, indem man statt von der Parallelströmung $V \cos\alpha$ von der Plattenumströmung mit $V \sin\alpha$ ausgeht, deren Normalkomponente an der Körperkontur auf die x-Achse transformiert und so wie oben angedeutet weiter rechnet. Wir wollen das hier nicht im einzelnen ausführen, sondern uns von vornherein überlegen, welche zusätzlichen Singularitäten an der x-Achse auftreten. Den Schlußschritt der Transformation der Geschwindigkeitskomponenten an der x-Achse auf die Tangentialgeschwindigkeit am Körper führen wir dann entsprechend (25) aus.

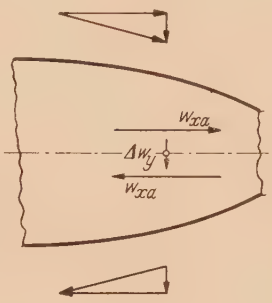


Abb. 1.

Es muß natürlich auch für die Anströmung mit $V \sin\alpha$ gefordert werden, daß die Richtung der Strömung an jeder Stelle x gleich der Neigung der Körperkontur ist. Es muß also durch zusätzliche Singularitäten auf der x-Achse eine zusätzliche Abwärtsgeschwindigkeit Δw_y erzeugt werden, die sich mit der tangentialen Geschwindigkeit $\pm V \sin\alpha \sqrt{(l-2x)/(l+2x)}$ der Wirbelbelegung γ_a der ebenen Platte zu einer resultierenden Geschwindigkeit in Richtung der Körperkontur zusammensetzt (vgl. Abb. 1). Das führt zu der Beziehung

$$\frac{\Delta w_y}{\pm V \sin\alpha \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}}} = \pm \frac{dy^{(t)}}{dx} \tag{26}$$

und damit zu

$$\Delta w_y = V \sin\alpha \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}}\, \frac{dy^{(t)}}{dx}\,. \tag{27}$$

Wenn diese Beziehung erfüllt werden soll, muß beachtet werden, daß die von der Wirbelbelegung der ebenen Platte an der x-Achse erzeugte Abwärtsgeschwindigkeit nur an der x-Achse selbst konstant ist, sich aber ihrem Betrage nach mit der Entfernung von dieser verändert. Diese Änderung findet man aus dem Störungsfeld $V \sin\alpha \sqrt{(l-2z)/(l+2z)}$ (mit $z = x + iy$) der Platte mit glattem Abfluß, indem man den Imaginärteil für kleine senkrechte Abstände y von der Platte entwickelt:

$$\Delta w_y^* = V \sin\alpha \frac{y}{\left(\frac{l}{2}+x\right)\sqrt{1-\frac{4x}{l^2}}}\,. \tag{28}$$

Wir müssen daher, um die Geschwindigkeit (27) zu erreichen, eine zusätzliche Wirbelbelegung $\gamma_d(x)$ auf der x-Achse anbringen, die gerade eine Korrekturgeschwindigkeit des Betrages

$$\Delta w_y^{(corr)} = \Delta w_y - \Delta w_y^* \tag{29}$$

erzeugt. Setzen wir für y die Körperordinaten ein und betrachten $\Delta w_y^{(corr)}$ näherungsweise als Geschwindigkeit auf der x-Achse, so ergibt sich eine solche Wirbelbelegung aus der bekannten

Integralgleichung (1). Durch Einsetzen von (29) in (10) ergibt sich die Lösung

$$\gamma_d = -\frac{2}{\pi} V \sin\alpha \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}} \int_{-l/2}^{+l/2} \left(\frac{dy^{(t)}}{dx'} - \frac{y^{(t)}}{1-\frac{4x'^2}{l^2}} \right) \frac{dx'}{x'-x} . \tag{30}$$

Die Gleichungen (18), (22) und (30) geben uns damit die den symmetrischen Körper bei Anströmung unter einem Anstellwinkel α ersetzenden Quell- und Wirbelbelegungen. Von ihnen rühren die folgenden Geschwindigkeitsanteile an der x-Achse her:

$$w_{xa} = \pm \frac{\gamma_a}{2}; \quad w_{xc} \text{ nach (24)}; \quad w_{xd} = \pm \frac{\gamma_d}{2}. \tag{31}$$

Durch die zu Beginn dieses Abschnittes angegebene Transformation der Geschwindigkeit von der x-Achse auf den Körperrand, ergeben sich dort die zusätzlichen Tangentialkomponenten

$$(w_{xa} + w_{xc} + w_{xd}) / \sqrt{1+y'^2} \tag{32}$$

und nach Addition der von der Anströmung herrührenden Tangentialkomponente ergibt sich schließlich der Betrag der Geschwindigkeit zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+y^{(t)\prime 2}}} \Bigg[& \cos\alpha \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy^{(t)}}{dx'} \frac{dx'}{x'-x} \right) \pm \\ & \pm \sin\alpha \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \left(\frac{dy^{(t)}}{dx'} - \frac{y^{(t)}}{1-\frac{4x'^2}{l^2}} \right) \frac{dx'}{x'-x} \right) \Bigg] \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

oder in φ geschrieben

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{4}{l^2}\left(\frac{dy^{(t)}}{d\varphi}\right)^2}} \Bigg[& \cos\alpha \left(\sin\varphi - \frac{2}{l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy^{(t)}}{d\varphi'} \operatorname{ctg} \frac{\varphi'-\varphi}{2} \, d\varphi' \right) + \\ & + \sin\alpha \, (1-\cos\varphi) \left(1 - \frac{2}{l \sin\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy^{(t)}}{d\varphi'} + \frac{y^{(t)}}{\sin\varphi'} \right) \operatorname{ctg} \frac{\varphi'-\varphi}{2} \, d\varphi' \right) \Bigg] . \end{aligned}\right\} \tag{33a}$$

5. Die Strömung um unsymmetrische Körper endlicher Dicke. Dieselben Überlegungen, die im vorigen Abschnitt den Anstellwinkeleinfluß lieferten, lassen sich sinngemäß auch auf Körper mit nicht mehr gerader Mittellinie anwenden. Beschränkt man sich aber — wie bei der Näherungstheorie der dünnen Platten üblich (vgl. Abschnitt 3) — auf kleine Wölbungen ($f/l \ll 1$), so bringt dieses $\sin\alpha$ proportionale Zusatzglied keinen nennenswerten Beitrag. Unsymmetrische Körperformen $y = y(x)$ [genauer: $y_0(x)$ für die Ober-, $y_u(x)$ für die Unterseite] erhält man nun in einfacher Weise durch additive Überlagerung symmetrischer Körperformen $y^{(t)}$ mit dünnen gewölbten Platten $y^{(s)}$:

$$y = y^{(s)} \pm y^{(t)} = \frac{y_0 + y_u}{2} \pm \frac{y_0 - y_u}{2} . \tag{34}$$

Bei der entsprechenden Überlagerung der Geschwindigkeitsanteile an der x-Achse tritt dann zu den Anteilen (31) noch der von der Wölbung herrührende Anteil $w_{xb} = \pm \frac{1}{2} \gamma_b$ mit γ_b aus (20). Anschließend kann man wie in (32) einen dem Übergang von der ebenen Platte zum symmetrischen dicken Körper ganz entsprechenden Übergang von der gewölbten Mittellinie des Körpers [vgl. Gl. (20)] zum unsymmetrischen dicken Körper vornehmen, wobei sich die hohen Geschwindigkeiten an der Vorderkante wieder mit dem Faktor $\sqrt{1+y'^2}$ reduzieren. Es ist deshalb möglich, eine der Gleichung (33a) ganz entsprechende Gleichung aufzuschreiben, in welcher statt $y^{(t)}$ nunmehr an zwei Stellen die Ordinaten y des gewölbten dicken Körpers auftreten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{4}{l^2}\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}} \Bigg[& \cos\alpha \left(\sin\varphi - \frac{2}{l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{d\varphi'} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi'-\varphi}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\varphi'}{2} \right) d\varphi' \right) + \\ & + \sin\alpha \, (1-\cos\varphi) \left(1 - \frac{2}{l \sin\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy^{(t)}}{d\varphi'} + \frac{y^{(t)}}{\sin\varphi'} \right) \operatorname{ctg} \frac{\varphi'-\varphi}{2} \, d\varphi' \right) \Bigg] . \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

6. Einführung von Fourier-Entwicklungen; Kraft und Moment. Um über diese Grundlagen der Theorie hinaus bequem weitere Aussagen machen zu können, ist es zweckmäßig, eine *Fourier*-Entwicklung für y anzusetzen:

$$\frac{y}{l/2} = \sum_{\nu} (a_\nu \cos \nu \varphi + b_\nu \sin \nu \varphi) . \tag{36}$$

Die cos-Reihe gibt dabei die Verteilung der Wölbung, die sin-Reihe die Verteilung der Dicke über die Tiefe wieder. Damit überzeugt man sich zunächst leicht, daß für $b_\nu = 0$ wieder die übliche Theorie der dünnen Platten resultiert. Durch Einsetzen von (36) in (35) folgt nämlich für kleine $dy/d\varphi$ unter Beachtung von (15)

$$\frac{W}{V} = 1 + \sum_{\nu} \nu a_\nu \frac{\cos \nu \varphi - 1}{\sin \varphi} + \alpha \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} . \tag{37}$$

Als Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich also der aus der Theorie der dünnen Platten wohlbekannte Ausdruck[1]. Er möge hier noch etwas umgeformt werden. Das darin enthaltene Anstellwinkelglied läßt sich abtrennen, wenn man die Summe in ihre geraden und ungeraden Glieder aufspaltet. Man erhält

$$\frac{W}{V} = 1 + \sum_{1}^{\infty} 2 \nu a_{2\nu} \frac{\cos 2\nu \varphi - 1}{\sin \varphi} + \sum_{2}^{\infty} (2\nu - 1) a_{2\nu-1} \frac{\cos (2\nu - 1)\varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi} + (\alpha - \alpha_s) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} , \tag{37a}$$

worin α_s, der Anstellwinkel des stoßfreien Eintritts, den Betrag

$$\alpha_s = \sum_{1}^{\infty} (2\nu - 1) a_{2\nu-1} \tag{37b}$$

annimmt.

Für endlich dicke Körper ($b_\nu \neq 0$) folgt durch Einsetzen von (36) in (35) nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{V} &= \frac{\left\{\cos \alpha (\sin \varphi + \sum_{1}^{\infty} \nu a_\nu \cos \nu \varphi + \sum \nu b_\nu \sin \nu \varphi - \sum \nu a_\nu) + \sin \alpha (1 - \cos \varphi)(1 + \sum \beta_\mu \cos \mu \varphi)\right\}}{\sqrt{\sin^2 \varphi + (\sum \nu b_\nu \cos \nu \varphi - \sum \nu a_\nu \sin \nu \varphi)^2}} \\ \text{mit} \quad & \beta_0 = \sum_{1}^{\infty} \nu b_\nu ; \qquad \beta_\mu = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[(2\nu + \mu - 1) b_{2\nu+\mu-1} + 2 \nu b_{2\nu+\mu}\right] . \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Um die Größe der auf den Körper ausgeübten Kraft und des Momentes zu bestimmen, schreiben wir zunächst die Wirbelverteilung an der x-Achse in *Fourier*-Darstellung auf. Bezeichnen wir den Zähler von (38) mit $F(\varphi)$, so folgt die Wirbelverteilung aus der Differenz der Geschwindigkeit $W\sqrt{1+y'^2}$ an der Ober- und Unterseite der Achse zu

$$\gamma(\varphi) = V\left(\frac{F(\varphi)}{\sin \varphi} - \frac{F(2\pi - \varphi)}{\sin (2\pi - \varphi)}\right) = V \frac{F(\varphi) + F(2\pi - \varphi)}{\sin \varphi} \qquad (0 \leqq \varphi \leqq \pi) \tag{39}$$

bzw.

$$\gamma(\varphi) = \frac{2V}{\sin \varphi} \left\{\cos \alpha \left(\sum_{1}^{\infty} \nu a_\nu \cos \nu \varphi - \sum_{1}^{\infty} \nu a_\nu\right) + \sin \alpha (1 - \cos \varphi) \left(1 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \beta_\mu \cos \mu \varphi\right)\right\} . \tag{40}$$

Durch Integration über die Tiefe erhalten wir als Kraft quer zur Strömungsrichtung

$$A = \varrho V \int_{-l/2}^{+l/2} \gamma(x)\, dx = \varrho V \frac{l}{2} \int_{0}^{\pi} \gamma(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi \tag{41}$$

bzw. deren Beiwert

$$c_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} V^2 l} = 2\pi \left[-\sum_{1}^{\infty} \nu a_\nu + \alpha \left(1 + \beta_0 - \frac{1}{2} \beta_1\right)\right] \tag{42}$$

$$= 2\pi \left[-\sum_{1}^{\infty} \nu a_\nu + \alpha \left(1 + \sum_{1}^{\infty} b_{2\nu-1}\right)\right] \tag{43}$$

und daraus den Anstellwinkel bei verschwindender Luftkraft

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{1}^{\infty} \nu a_\nu}{1 + \sum_{1}^{\infty} b_{2\nu-1}} . \tag{44}$$

[1] Vgl. z. B. *Durand*, Aerodynamic Theory, Bd. II, S. 41.

Bei der Berechnung des Momentes muß beachtet werden, daß außer der Wirbelverteilung auch die Quellverteilung einen Beitrag zum Moment liefert, wie man in Abb. 2 am Beispiel einer einzelnen Quelle und Senke leicht erkennt[1]. Beziehen wir das Moment auf den Punkt $x = -l/2$, so hat dieser Beitrag die Größe

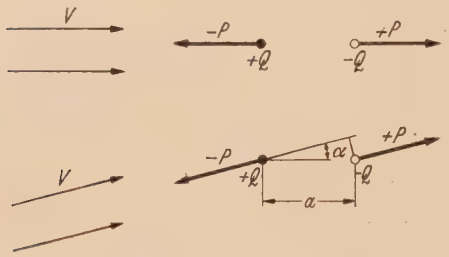


Abb. 2.

$$\Delta M = \varrho V \sin\alpha \int_{-l/2}^{+l/2} q(x)\left(\frac{l}{2} + x\right) dx, \tag{45}$$

so daß wir insgesamt für das Moment um den Punkt $x = -l/2$, welches bei Anströmung von links bei einer Drehung im Uhrzeigersinn positiv gezählt werden möge, erhalten

$$\left.\begin{aligned} M &= -\varrho V \int_{-l/2}^{+l/2} \big(\gamma(x) - \alpha q(x)\big)\left(\frac{l}{2} + x\right) dx \\ &= -\varrho V \frac{l^2}{4}\left[\int_0^\pi \gamma(\varphi)\,(1 + \cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi - \alpha \int_0^\pi q(\varphi)\cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi\right] \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

mit

$$q(\varphi) = -\frac{2}{l \sin\varphi}\, 2\, V \frac{dy^{(t)}}{d\varphi} = -\frac{2\,V}{\sin\varphi} \sum_1^\infty \nu b_\nu \cos\nu\varphi \tag{47}$$

bzw. für dessen Beiwert

$$\left.\begin{aligned} c_m &= \frac{M}{\frac{\varrho}{2} V^2 l^2} = \frac{\pi}{2}\left[-a_1 + 2\sum_1^\infty \nu a_\nu - \alpha\left(1 + \beta_0 - \frac{1}{4}\beta_2 + b_1\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-a_1 + 2\sum_1 \nu a_\nu - \alpha\left(1 + 2\,b_1 + \sum_1 (\nu + 1)\, b_{2\nu} + \frac{2\nu+1}{2}\, b_{2\nu+1}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Insbesondere ergibt sich daraus das Moment bei verschwindender Luftkraft

$$c_{m0} = \frac{\pi}{2} \sum_2^\infty \nu a_\nu \tag{49}$$

und die Änderung des Momentes mit wachsender Luftkraft

$$\left.\begin{aligned} \frac{d c_m}{d c_a} &= -\frac{1}{4}\left(1 + b_1 + \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left[1 + b_1 + \sum_1^\infty \left((\nu+1)\, b_{2\nu} + \frac{2\nu-1}{2}\, b_{2\nu+1}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

7. Berechnungsverfahren. Es gibt bisher zwei praktische Methoden, die die hier entwickelten theoretischen Überlegungen schon teilweise benutzen: a) die Methode von *Helmbold-Keune*, die einen Aufbau der Körperform und der Geschwindigkeitsverteilung durch Superposition bestimmter Grundverteilungen vornimmt, und b) die Methode von *Riegels-Wittich*, die eine unmittelbare Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung aus den vorgegebenen Körperordinaten gestattet. Die erstere ist vor einigen Jahren ausführlich dargelegt und etwas später durch weitere Tabellen und Diagramme ergänzt worden[2]. Die letztere schließt unmittelbar an (38) an. Diese Gleichung würde zur praktischen Berechnung eine *Fourier*-Entwicklung der Profilkontur erfordern. Diese läßt sich bei Anwendung des *Gauß*schen Verfahrens der mechanischen Quadratur vermeiden. Wenn man die Ordinaten an gewissen festen Stellen der x-Achse vorgibt, kann man auf diese Weise die *Fourier*-Summen durch einfache Summen ersetzen, deren Glieder aus Produkten der Profilordinaten mit gewissen festen Koeffizienten bestehen. Es ergibt sich so

[1] Vgl. *A. Betz*, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 458.

[2] Siehe Fußnote 3 von Seite 94.

$$\frac{W}{V} = \frac{\left| \begin{array}{l} \cos\alpha \left(a_n - \sum\limits_{m=1}^{N-1} A_{mn}\, 2\, y_m^{(t)} - \sum\limits_{1}^{N-1} C_m\, 2\, y_m^{(s)} + \sum\limits_{1}^{N-1} C_{m0}\, 2\, y_m^{(s)}\right) \\ + \sin\alpha\, b_n \left(1 + \sum\limits_{1}^{N}{}^{*}\, G_{mn}\, 2\, y_m^{(t)}\right) \end{array} \right|}{\sqrt{c_n + \left(\sum\limits_{1}^{N-1} B_{mn}\, 2\, y_m^{(t)} + \sum\limits_{1}^{N-1} D_{mn}\, 2\, y_m^{(s)}\right)^2}} \,. \tag{51}$$

Zu dem Stern an der G-Summe ist zu bemerken, daß der letzte Summand[1] lautet: $-G_{Nn} \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi}\, 2\, y_m^{(t)}/_{\varphi=\pi}$ und die Abkürzungen bedeuten:

$2N$ die Gesamtzahl der vorgegebenen Profilpunkte,

a_n, b_n, c_n feste Zahlen, die nur von den Stellen $x_n = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{N}$ abhängen, an welchen die Profilordinaten y_n (auf der Saugseite) und y_{2N-n} (auf der Druckseite), wobei die Körperlänge $l=1$ gesetzt ist, vorgegeben sind,

$$2\, y_m^{(t)} = y_m - y_{2N-n} \quad \text{und} \quad 2\, y_m^{(s)} = y_m + y_{2N-n}\,,$$

A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} und G_{mn} feste Koeffizienten, die für mehrere Werte von N (z. B. 6, 12 und 18) tabuliert sind[2]. Die folgenden Tabellen 1 bis 10 geben die Werte für $N=6$ und 12.

Ursprünglich verwendete der Verfasser statt der Wirbelverteilung (30) die Näherung $\gamma_d \approx 2\, V \sin\alpha\, dy/dx$. In der praktischen Anwendung lief das darauf hinaus, daß die Berechnung der G-Summe entfiel und statt dessen im Zähler von (51) der Ausdruck

$$\sin\alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{dy}{d\varphi} - \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}\right) = \sin\alpha \left[b_n + \sum_{1}^{N-1} (B_{mn}\, 2\, y_m^{(t)} - B_{m0}\, 2\, y_m^{(t)}) - \sum_{1}^{N-1} D_{mn}\, 2\, y_m^{(s)}\right]$$

bestimmt werden mußte. Das ergab für $dc_a/d\alpha$ eine den Einfluß der Profildicke nur ungenau wiedergebende Näherung $2\pi(1 + \Sigma B_{m0}\, 2\, y_m^{(t)})$, eine Tatsache, die für praktische Zwecke zwar nicht sehr störte, theoretisch jedoch nicht ganz befriedigte.

8. Einfache Spezialfälle. a) Die Ellipse mit dem beliebigen Dickenverhältnis t/l sei gegeben durch

$$x = \frac{l}{2} \cos\varphi\,, \qquad y = \frac{t}{2} \sin\varphi\,. \tag{52}$$

Nach (22) folgt hieraus die Quellbelegung zu

$$q(x) = 2\, V \frac{dy}{dx} = \frac{4\, V}{l^2} \frac{x\, t}{\sqrt{1 - \frac{4\, x^2}{l^2}}} \tag{53}$$

und aus (38) die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{W}{V} = \left(1 + \frac{t}{l}\right) \frac{\cos\alpha \sin\varphi + \sin\alpha\,(1 - \cos\varphi)}{\sqrt{\sin^2\varphi + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \cos^2\varphi}} \tag{54}$$

in Übereinstimmung mit der bekannten exakten Formel.

b) Das Kreisbogenzweieck geringer Dicke t und Wölbung f kann bequem durch Parabelbögen angenähert werden. Seine Kontur ist dann gegeben durch

$$x = \frac{l}{2} \cos\varphi\,, \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = \left(f + \frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{4\, x^2}{l^2}\right) = \left(f + \frac{t}{2}\right)(1 - \cos^2\varphi)\,, \\ y_u = \left(f - \frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{4\, x^2}{l^2}\right) = \left(f - \frac{t}{2}\right)(1 - \cos^2\varphi)\,. \end{array} \right\} \tag{55}$$

Die Wölbungsverteilung ist durch die Wirbelbelegung (20) in Verbindung mit (15)

$$\gamma(x) = 8\, V \frac{f}{l} \sin\varphi = 8\, V \frac{f}{l} \sqrt{1 - \frac{4\, x^2}{l^2}} \tag{56}$$

---

[1] Dieses Glied charakterisiert das Verhalten an der Körpernase und ist durch Auftragen einiger weniger Punkte in der Nähe von $\varphi=\pi$ über φ leicht zu ermitteln. Dabei ist angenommen, daß der Körper hinten in eine spitze Kante ausläuft. Endigt der Körper (etwa wie eine Ellipse) stumpf, so müßte ein entsprechendes zusätzliches Glied $G_{on} \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi}\, 2\, y_m^{(t)}/_{\varphi=0}$ mit $G_{on} = -G_{N,\,N-n}$ zur Beschreibung des Verhaltens am hinteren Körperende berücksichtigt werden.

[2] Siehe Fußnote 4 von Seite 94.

Zahlentafel 1

n bzw. m				$\frac{\xi_m}{l} = \frac{1}{2} + \frac{x_m}{l}$	a_n		b_n	c_n
12	6	12	6					
↓ Oberseite ↓		↑ Unterseite ↑			↓	↑		
0	0	24	12	1,00000	0	0	0	0
1		23		0,98297	−0,12941	+0,12941	−0,01704	0,01675
2	1	22	11	0,93302	−0,25000	+0,25000	−0,06698	0,06250
3		21		0,85356	−0,35356	+0,35356	−0,14644	0,12500
4	2	20	10	0,75000	−0,43302	+0,43302	−0,25000	0,18751
5		19		0,62941	−0,48296	+0,48296	−0,37059	0,23325
6	3	18	9	0,50000	−0,50000	+0,50000	−0,50000	0,25000
7		17		0,37059	−0,48296	+0,48296	−0,62941	0,23325
8	4	16	8	0,25000	−0,43302	+0,43302	−0,75000	0,18751
9		15		0,14645	−0,35356	+0,35356	−0,85356	0,12500
10	5	14	7	0,06699	−0,25000	+0,25000	−0,93302	0,06250
11		13		0,01704	−0,12941	+0,12941	−0,98296	0,01675
12	6	12	6	0,00000	0	0	−1,00000	0

Zahlentafel 2 A_{mn} $N = 6$

m	1	2	3	4	5
$n=0$	0	0	0	0	0
1	+1,50000	−0,53867	0	−0,03868	0
2	−0,53867	+1,50000	−0,57735	0	−0,03868
3	0	−0,57735	+1,50000	−0,57735	0
4	−0,03868	0	−0,57735	+1,50000	−0,53867
5	0	−0,03868	0	−0,53867	+1,50000
6	0	0	0	0	0

Zahlentafel 3 B_{mn} $N = 6$

m	1	2	3	4	5
$n=0$	+1,86602	−0,86602	+0,50000	−0,28868	+0,13398
1	−0,43301	+1,18301	−0,57735	+0,31699	−0,14434
2	−0,68301	−0,14434	+1,00000	−0,43301	+0,18301
3	+0,28868	−0,86602	0	+0,86602	−0,28868
4	−0,18301	+0,43301	−1,00000	+0,14434	+0,68301
5	+0,14434	−0,31699	+0,57735	−1,18301	+0,43301
6	−0,13398	+0,28868	−0,50000	+0,86602	−1,86602

Zahlentafel 4 C_{mn} $N = 6$

m	1	2	3	4	5
$n=0$	−1,24400	0	−0,16663	0	−0,08932
1	+1,50000	−0,70533	0	−0,12799	0
2	−0,70533	+1,50000	−0,66666	0	−0,12799
3	0	−0,66666	+1,50000	−0,66666	0
4	−0,12799	0	−0,66666	+1,50000	−0,70533
5	0	−0,12799	0	−0,70533	+1,50000
6	−0,08932	0	−0,16666	0	−1,24400

Zahlentafel 5 D_{mn} $N = 6$

m	1	2	3	4	5
$n=0$	0	0	0	0	0
1	−0,43301	−0,68301	+0,28868	−0,18301	+0,14434
2	+1,18301	−0,14434	−0,86602	+0,43301	−0,31699
3	−0,57735	+1,00000	0	−1,00000	+0,57735
4	+0,31699	−0,43301	+0,86602	+0,14434	−1,18301
5	−0,14434	+0,18301	−0,28868	+0,68301	+0,43301
6	0	0	0	0	0

Zahlentafel 6 G_{mn} $N = 12$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n=1$	23,18213	−11,68774	0	−1,07789	0	−0,35121	0	−0,19844	0	−0,20686	0	−0,08477
2	2,12308	12,00000	−6,15016	0	−0,72080	0	−0,28064	0	−0,19748	0	−0,36440	0
3	0	−1,20254	8,48512	−4,29460	0	−0,56901	0	−0,25851	0	−0,24559	0	−0,09764
4	1,18336	0	−1,60979	6,92809	−3,48333	0	−0,50698	0	−0,27615	0	−0,45933	0
5	0	0,32295	0	−1,68374	6,21169	−3,13231	0	−0,50431	0	−0,36220	0	−0,13239
6	0,62042	0	0,09764	0	−1,73690	6,00000	−3,07022	0	−0,56904	0	−0,71290	0
7	0	0,23047	0	0,00294	0	−1,84442	6,21170	−3,27965	0	−0,77499	0	−0,22486
8	0,41920	0	0,11436	0	−0,05221	0	−2,05249	6,92809	−3,88590	0	−1,58076	0
9	0	0,17822	0	0,06036	0	−0,09764	0	−2,43619	8,48512	−5,39747	0	−0,56904
10	0,33864	0	0,10220	0	0,02616	0	−0,15248	0	−3,18384	12,00000	−10,76876	0
11	0	0,15710	0	0,06414	0	−0,00610	0	−0,25184	0	−5,01437	23,18213	−4,89128

$$\left.\begin{matrix} A_{mn} \\ C_{mn} \end{matrix}\right\} = \frac{(-1)^{m+n}-1}{4N}\left\{\frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m-n)}{N}} \pm \frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m+n)}{N}}\right\} \text{ bzw. } = \frac{N}{4} \text{ für } m = n$$

$$\begin{matrix} B_{mn} = \\ D_{mn} = \end{matrix} \frac{(-1)^{m+n+1}}{4}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(m-\pi)}{2N} \pm \operatorname{ctg}\frac{\pi(m+n)}{2N}\right\} \text{ bzw. } = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{N} \text{ für } m = n$$

$$G_{mn} = \frac{1-(-1)^{m+n}}{2N\sin\frac{\pi n}{N}}\left\{\frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m+n)}{N}} - \frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m-n)}{N}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi m}{N}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(m+n)}{2N} - \operatorname{ctg}\frac{\pi(m-n)}{2N}\right)\right\}$$

$$\text{bzw. } = \frac{N}{2\sin\frac{\pi n}{N}} \text{ für } m = n$$

Zahlentafel 7 A_{mn} $N = 12$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3,00000	−1,08071	0	−0,08604	0	−0,02312	0	−0,00869	0	−0,00322	0
2	−1,08071	3,00000	−1,16675	0	−0,10916	0	−0,03181	0	−0,01191	0	−0,00322
3	0	−1,16675	3,00000	−1,18987	0	−0,11785	0	−0,03503	0	−0,01191	0
4	−0,08604	0	−1,18987	3,00000	−1,19856	0	−0,12107	0	−0,03503	0	−0,00869
5	0	−0,10916	0	−1,19856	3,00000	−1,20178	0	−0,12107	0	−0,03181	0
6	−0,02312	0	−0,11785	0	−1,20178	3,00000	−1,20178	0	−0,11785	0	−0,02312
7	0	−0,03181	0	−0,12107	0	−1,20178	3,0000	−1,19856	0	−0,10916	0
8	−0,00869	0	−0,03503	0	−0,12107	0	−1,19856	3,00000	−1,18987	0	−0,08604
9	0	−0,01191	0	−0,03503	0	−0,11785	0	−1,18987	3,00000	−1,16675	0
10	−0,00322	0	−0,01191	0	0,03181	0	−0,10916	0	−1,16675	3,00000	−1,08071
11	0	−0,00322	0	−0,00869	0	−0,02312	0	−0,08604	0	−1,08071	3,00000
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Zahlentafel 8 B_{mn} $N = 12$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n=0$	3,79788	−1,86602	1,20710	−0,86602	0,65161	0,50000	0,38366	−0,28868	0,20710	0,13398	0,06582
1	−0,93301	2,50249	−1,36602	0,92936	−0,68301	0,51764	−0,39434	0,29538	−0,21132	0,13646	−0,06699
2	−1,29538	−0,43301	2,22474	−1,18301	0,79538	−0,57735	0,42936	−0,31699	0,22474	−0,14434	0,07064
3	0,50000	−1,57313	−0,25000	2,09077	−1,07735	0,70710	−0,50000	0,35872	−0,25000	0,15892	−0,07735
4	−0,27774	0,68301	−1,70710	−0,14434	2,00249	−1,00000	0,63646	−0,43301	0,29289	−0,18301	0,08828
5	0,18301	−0,41172	0,78868	−1,79538	−0,06699	1,93185	−0,93301	0,57064	−0,36602	0,22226	−0,10566
6	−0,13398	0,28868	−0,50000	0,86602	−1,86602	0	1,86602	−0,86602	0,50000	−0,28868	0,13398
7	0,10566	−0,22226	0,36602	−0,57064	0,93301	−1,93185	0,06699	1,79538	−0,78868	0,41172	−0,18301
8	−0,08828	0,18301	−0,29289	0,43301	−0,63646	1,00000	−2,00249	0,14434	1,70710	−0,68301	0,27774
9	0,07735	−0,15892	0,25000	−0,35872	0,50000	−0,70710	1,07735	−2,09077	0,25000	1,57313	−0,50000
10	−0,07064	0,14434	−0,22474	0,31699	−0,42936	0,57735	−0,79538	1,18301	−2,22474	0,43301	1,29538
11	0,06699	−0,13646	0,21132	−0,29538	0,39434	−0,51764	0,68301	−0,92936	1,36602	−2,50249	0,93301
12	−0,06582	0,13398	−0,20710	0,28868	−0,38366	0,50000	−0,65161	0,86602	−1,20710	1,86602	−3,79788

Zahlentafel 9 C_{mn} $N = 12$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n=0$	−2,44594	0	−0,28452	0	−0,11244	0	−0,06620	0	−0,04882	0	−0,04238
1	3,00000	−1,36523	0	−0,19848	0	−0,08932	0	−0,05751	0	−0,04560	0
2	−1,36523	3,00000	−1,27919	0	−0,17536	0	−0,08063	0	−0,05429	0	−0,04560
3	0	−1,27919	3,00000	−1,25607	0	−0,16667	0	−0,07741	0	−0,05429	0
4	−0,19848	0	−1,25607	3,00000	−1,24738	0	−0,16345	0	−0,07741	0	−0,05751
5	0	−0,17536	0	−1,24738	3,00000	−1,24416	0	−0,16345	0	−0,08063	0
6	−0,08932	0	−0,16667	0	−1,24416	3,00000	−1,24416	0	−0,16667	0	−0,08932
7	0	−0,08063	0	−0,16345	0	−1,24416	3,00000	−1,24738	0	−0,17536	0
8	−0,05751	0	−0,07741	0	−0,16345	0	−1,24738	3,00000	−1,25607	0	−0,19848
9	0	−0,05429	0	−0,07741	0	−0,16667	0	−1,25607	3,00000	−1,27919	0
10	−0,04560	0	−0,05429	0	−0,08063	0	−0,17536	0	−1,27919	3,00000	−1,36523
11	0	−0,04560	0	−0,05751	0	−0,08932	0	−0,19848	0	−1,36523	3,00000
12	−0,04238	0	−0,04882	0	−0,06620	0	−0,11244	0	−0,28452	0	−2,44594

Zahlentafel 10 D_{mn} $N = 12$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−0,93301	−1,29538	0,50000	−0,27774	0,18301	−0,13398	0,10566	−0,08828	0,07735	−0,07064	0,06699
2	2,50249	−0,43301	−1,57313	0,68301	−0,41172	0,28868	−0,22226	0,18301	−0,15892	0,14434	−0,13646
3	−1,36602	2,22474	−0,25000	−1,70710	0,78868	−0,50000	0,36602	−0,29289	0,25000	−0,22474	0,21132
4	0,92936	−1,18301	2,09077	−0,14434	−1,79538	0,86602	−0,57064	0,43301	−0,35872	0,31699	−0,29538
5	−0,68301	0,79538	−1,07735	2,00249	−0,06699	−1,86602	0,93301	−0,63646	0,50000	−0,42936	0,39434
6	0,51764	−0,57735	0,70710	−1,00000	1,93185	0	−1,93185	1,00000	−0,70710	0,57735	−0,51764
7	−0,39434	0,42936	−0,50000	0,63646	−0,93301	1,86602	0,06699	−2,00249	1,07735	−0,79538	0,68301
8	0,29538	−0,31699	0,35872	−0,43301	0,57064	−0,86602	1,79538	0,14434	−2,09077	1,18301	−0,92936
9	−0,21132	0,22474	−0,25000	0,29289	−0,36602	0,50000	−0,78868	1,70710	0,25000	−2,22474	1,36602
10	0,13646	−0,14434	0,15892	−0,18301	0,22226	−0,28868	0,41172	−0,68301	1,57313	0,43301	−2,50249
11	−0,06699	0,07064	−0,07735	0,08828	−0,10566	0,13398	−0,18301	0,27774	−0,50000	1,29538	0,93301
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

und die Dickenverteilung durch die Quellbelegung (22)

$$q(x) = 2\,V\frac{dy}{dx} = -8\,V\frac{t}{l}\,\frac{x}{l} \tag{57}$$

bestimmt. Aus der letzteren ergibt sich die Übergeschwindigkeit nach (23) zu

$$w_{xc} = V\frac{4}{\pi}\,\frac{t}{l^2}\int\limits_{-l/2}^{+l/2}\frac{x'\,dx'}{x'-x} = V\frac{4}{\pi}\,\frac{t}{l^2}\left(\int\limits_{-l/2}^{+l/2}dx' + x\int\limits_{-l/2}^{+l/2}\frac{dx'}{x'-x}\right) = V\frac{4}{\pi}\,\frac{t}{l}\left(1+\frac{x}{l}\ln\frac{l-2\,x}{l+2\,x}\right),$$

so daß sich insgesamt für die Geschwindigkeit ergibt

$$\frac{W}{V} = 1 + \frac{4}{\pi}\,\frac{t}{l}\left(1+\frac{x}{l}\ln\frac{l-2\,x}{l+2\,x}\right) \pm 4\,\frac{f}{l}\sqrt{1-\frac{4\,x^2}{l^2}} \pm \alpha\sqrt{\frac{l-2\,x}{l+2\,x}}\,. \tag{58}$$

Man stellt hier die bekannte Tatsache fest, daß bei linearisierter Darstellung beim Kreisbogenzweieck (ohne Wölbung und Anstellwinkel) an der Vorder- und Hinterkante unendlich große Geschwindigkeiten auftreten. Doch handelt es sich dabei um eine Singularität der Form $\ln\xi$, die schon in sehr kleinem Abstand ξ von diesen Stellen praktisch bedeutungslos wird. Der Grund für dieses singuläre Verhalten an den Enden der Quellstrecke ist darin zu sehen, daß die vorliegende Theorie als Körper endlicher Dicke solche mit überall stetiger Tangente voraussetzt und daher Staupunkte vorschreibt, bei welchen die Verzweigung der Stromlinie $\Psi=0$ unter einem rechten Winkel zur Körperkontur vor sich geht. Bei Staupunkten mit anderen Verzweigungswinkeln der Nullstromlinie, wie sie z. B. an den Endpunkten des Kreisbogenzweiecks vorliegen, muß dann notwendigerweise eine leichte Singularität auftreten, wie auch die genauere Diskussion mit Hilfe der konformen Abbildung zeigt.

c) Die Kontur des symmetrischen *Joukowsky*-Profiles ist gegeben durch

$$x = \frac{l}{2}\cos\varphi\,, \qquad y = \frac{\varepsilon}{2}\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,. \tag{59}$$

Aus (22) folgt als Quellbelegung auf der x-Achse

$$q(x) = 2\,V\frac{dy}{dx} = -2\,V\frac{\varepsilon}{l}\,\frac{1+\frac{2\,x}{l}-\frac{8\,x^2}{l^2}}{\sqrt{1-\frac{4\,x^2}{l^2}}} \tag{60}$$

und aus (38) als Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{W}{V} = \frac{\cos\alpha\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{l}\right)\sin\varphi - \frac{\varepsilon}{l}\sin 2\,\varphi\right) + \sin\alpha\,(1-\cos\varphi)\left(1-2\,\frac{\varepsilon}{l}\cos\varphi\right)}{\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{\varepsilon^2}{l^2}(\cos\varphi-\cos 2\,\varphi)^2}}\,. \tag{61}$$

Für $\varepsilon=0$ ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung der ebenen Platte. Die Durchführung der numerischen Rechnung zeigt im übrigen weitgehende Übereinstimmung mit der exakten Theorie. Es ist dabei selbstverständlich, daß bei zu großen Dickenverhältnissen (etwa über $d/l=0{,}2$) gewisse kleine Abweichungen der Geschwindigkeitsverteilung von derjenigen auftreten, die mittels konformer Abbildung exakt berechnet ist. Das liegt daran, daß die linearisierte Körperform (59) in solchen Fällen nicht mehr mit der exakten übereinstimmt. Berechnet man die Geschwindigkeitsverteilung aus den exakten Koordinaten, nach (33a) oder (51), so erhält man erfahrungsgemäß auch noch bei größeren Körperdicken Übereinstimmung mit der exakten Geschwindigkeitsverteilung.

Weiter interessieren hier noch die Kraft und das Moment. Man erhält aus (43), (48) und (50) durch Einsetzen von $b_1=\varepsilon/l$ und $b_2=-\varepsilon/2\,l$

$$c_a = 2\,\pi\,\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{l}\right), \tag{62}$$

$$c_m = -\frac{\pi}{2}\,\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{l}\right), \tag{63}$$

$$\frac{d\,c_m}{d\,c_a} = -\frac{1}{4}\,, \tag{64}$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der exakten Theorie.

d) Die Kontur eines anderen einfachen symmetrischen Profiles lautet

$$y = d\sqrt{\xi}\,(1-\xi)\,(1+k_1\,\xi+k_2\,\xi^2) \qquad (0 \leqq \xi \leqq 1)\,. \tag{65}$$

Als Quellbelegung auf der x-Achse ergibt sich

$$q(\xi) = 2\,V y' = V d\,\frac{1}{\sqrt{\xi}}\left[1+3\,(k_1-1)\,\xi+5\,(k_2-k_1)\,\xi^2-7\,k_2\,\xi^3\right], \tag{66}$$

und aus (33) folgt als Geschwindigkeitsverteilung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg\{&\cos\alpha\left[1+\frac{y'}{\pi}\log\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}-\frac{d}{\pi}\,(c_0+c_1\xi+c_2\xi^2)\right]\pm\\ &\pm\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}\left[1+\frac{1}{\pi}\left(y'+\frac{y}{4\,\xi\,(1-\xi)}\right)\log\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}-\frac{d}{\pi}\,(c_0'+c_1'\xi+c_2'\xi^2)\right]\Bigg\}\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= -3+\frac{4}{3}\,k_1+\frac{4}{15}\,k_2, & c_0' &= 3+\frac{11}{6}\,k_1+\frac{13}{30}\,k_2,\\ c_1 &= -5\,k_1+\frac{8}{3}\,k_2, & c_1' &= -5\,k_1+\frac{19}{6}\,k_2,\\ c_2 &= -7\,k_2, & c_2' &= -7\,k_2.\end{aligned}$$

Es ist leicht möglich, den Ansatz (65) durch Hinzunahme höherer Glieder $k_\nu\,\xi^\nu$ in der letzten Klammer zu erweitern und die entsprechenden Rechnungen durchzuführen.

e) Die Kontur einer dünnen gewölbten Platte laute

$$y = 4\,f\,\xi\,(1-\xi)\,(1+l_1\xi+l_2\xi^2) \qquad (0 \leqq \xi \leqq 1)\,. \tag{68}$$

Durch Einführung von $\xi = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi$ läßt sich (68) in eine Fourierreihe umwandeln, und nach (37a) und Rücktransformation auf ξ ergibt sich so als Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{W}{V} = 1+8\,f\sqrt{\xi\,(1-\xi)}\,(d_0+d_1\xi+d_2\xi^2) \tag{69}$$

mit

$$\begin{aligned} d_0 &= 1+\frac{1}{8}\,l_1+\frac{3}{8}\,l_2,\\ d_1 &= \frac{3}{2}\,l_1-\frac{1}{2}\,l_2,\\ d_2 &= 2\,l_2.\end{aligned}$$

Als Anstellwinkel des stoßfreien Eintritts findet man nach (37b)

$$\alpha_s = -\frac{f}{2}\,(l_1+l_2) \tag{70}$$

und als Nullanstellwinkel nach (44)

$$\alpha_0 = 2\,f\left(1+\frac{3}{4}\,l_1+\frac{5}{8}\,l_2\right). \tag{71}$$

Als Momentenbeiwert findet man schließlich nach (49)

$$c_{m0} = -\pi f\left(1+\frac{7}{8}\,l_1+\frac{3}{4}\,l_2\right). \tag{72}$$

Auch hier bereitet es keine Schwierigkeiten, die Rechnung auf höhere Glieder $l_\nu\,\xi^\nu$ von (68) auszudehnen.

9. Anhang: Einige bestimmte Integrale. Ist die Funktion $f(\varphi)$ in (12) und (13) speziell in Gestalt von Fourierreihen gegeben, so gilt für das ν-te Fourierglied

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\nu\varphi'\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi'-\varphi}{2}\,d\varphi' = +\sin\nu\varphi\,, \tag{73}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\nu\varphi'\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi'-\varphi}{2}\,d\varphi' = -\cos\nu\varphi\,. \tag{74}$$

Für die Berechnung von Beispielen interessieren die folgenden Integrale längs der Abszisse $\xi = \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi$:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}}\,\frac{dt}{t-\xi} = \pi \qquad (0 < \xi < 1), \tag{75}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t-\xi)} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \log \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \tag{76}$$

$$\int_0^1 \frac{t^{n+\frac{1}{2}}\,dt}{t-\xi} = 2\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\xi^\nu}{2n+2\nu+1} + \xi^{n+\frac{1}{2}} \log \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{77}$$

$$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)} = \frac{\pi}{8}, \tag{78}$$

$$\int_0^1 t^m \sqrt{t(1-t)}\,dt = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m+1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2m+4)}\,\pi \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{79}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi, \tag{80}$$

$$\int_0^1 \frac{t^m\,dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2m}\,\pi \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{81}$$

10. Zusammenfassung. Für Körper mäßiger Dicke und Wölbung, aber sonst beliebiger Gestalt wird eine Theorie entwickelt, die die Strömungsgeschwindigkeit, die Kraft und das Moment mit Hilfe von Quell- und Wirbelbelegungen auf einer geraden Strecke von der Länge der größten Körpersehne zu bestimmen gestattet.

(Eingegangen am 1. Dezember 1947.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Fritz Riegels*, (20b) Göttingen, Zeppelinstraße 4.

Scherprobleme.

Von **R. Grammel.**

1. Einleitung. Im folgenden zeige ich eine besondere Klasse von Ausweichproblemen auf, die man unter dem gemeinsamen Namen Scherprobleme zusammenfassen kann (Zugscherung, Torsionsscherung, Biegescherung). Es handelt sich um sehr einfache, aber anscheinend wenig oder gar nicht bekannte Stabilitätsprobleme, bei denen der Spannungszustand — im Gegensatz zum Knicken und Kippen von Stäben, Platten und Schalen — im allgemeinen nicht zusammengesetzt ist. Als Eigenwertprobleme zweiter Art unterscheiden sie sich mathematisch wesentlich von den üblichen Eigenwertproblemen (erster Art) der kontinuierlichen elastischen Systeme (wie Knickung, Kippung). Die Bezeichnung Scherprobleme halte ich deswegen für angebracht, weil dabei die belastenden Kräfte, wenn sie von Null an stetig wachsen, bei einem bestimmten Betrag, der Scherkraft, plötzlich seitlich ausscheren und so die Verformung erzeugen.

Ich erläutere das Problem zuerst an einem einfachen Beispiel (Torsionsscherung der Welle, Ziff. **2**), behandle es dann allgemein als Eigenwert- bzw. Verzweigungsproblem (Ziff. **3**) und füge weitere, nunmehr naheliegende Beispiele hinzu (Ziff. **4**, **5** und **7**).

Dabei stößt man von selbst auf ein aus erster und zweiter Art gemischtes Eigenwertproblem, als dessen wohl merkwürdigster Fall die Knickung eines Stabes infolge von Zugkräften erscheint (Ziff. **6**).

Den Schluß bilden Beispiele für die Biegescherung von Platten (Ziff. **8**).

Übrigens kann man zu den Scherproblemen auch schon die von mir früher[1] untersuchten Kipperscheinungen an Ringen infolge von radialen Innen- oder Außenkräften zählen; auch bei ihnen scheren unter gewissen Umständen die Kräfte, wenn sie von Null an stetig wachsen, bei einem bestimmten Betrag seitlich (axial) aus, allerdings erst nach einer Erweiterung bzw. Verengung des Ringes, so daß es sich hier, im Unterschied von den folgenden reinen Scherproblemen, um einen zusammengesetzten Spannungszustand handelt.

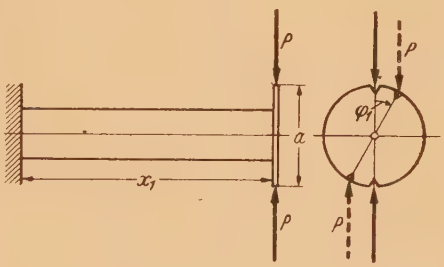


Abb. 1. Torsionsscherung einer Welle.

2. Torsionsscherung einer Welle. Eine Welle von der Länge x_1 (Abb. 1) und der Torsionssteifigkeit α sei am einen Ende eingespannt; am anderen Ende greifen zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte P von unveränderlicher Richtung an zwei gegenüberstehenden Punkten einer starren Endscheibe vom Durchmesser a an (die den Stabquerschnitt nicht zu überragen braucht). Außer dem untordierten Zustand der Welle gibt es möglicherweise noch einen zweiten Gleichgewichtszustand, in welchem die Welle um den Winkel φ_1 tordiert ist. Hierbei muß offenbar das Torsionsmoment $\alpha\varphi_1/x_1$ gleich dem Moment $aP\sin\varphi_1$ der Kräfte P sein:

$$\frac{\alpha}{x_1}\varphi_1 = aP\sin\varphi_1. \tag{1}$$

Diese Gleichung ist für alle Werte von P erfüllt, wenn $\varphi_1=0$, die Welle also nicht tordiert ist, außerdem aber nur für eine Kraft von der Größe

$$P_1 = \frac{\alpha}{a\,x_1}\,\frac{\varphi_1}{\sin\varphi_1}, \tag{2}$$

deren kleinster Wert für $\varphi_1 \longrightarrow 0$

$$P_s = \frac{\alpha}{a\,x_1} \tag{3}$$

wird. Wir nennen P_s die Torsionsscherkraft.

Wächst also P von Null an langsam und stetig, so bleibt die Welle zunächst untordiert; von $P=P_s$ an kann sie — und wird sie bei der geringsten Störung — sich tordieren. Beschränkt man sich auf kleine Winkel φ_1 (Linearisierung des Problems), so ist $P_1=P_s$: die Welle erleidet bei der Torsierungsscherung P_s plötzlich eine unbestimmte Torsionsauslenkung φ_1 (analog zur

[1] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 438; 7 (1927) S. 198; oder *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 562. Berlin 1939.

elementaren Stabknickung). Linearisiert man nicht, so gehören zu jeder Kraft $P_1 > P_s$ außer dem instabilen Zustand $\varphi_1 = 0$ zwei entgegengesetzt gleiche stabile Auslenkungen φ_1, die aus (2) folgen und in Abb. 2 dargestellt sind. Man erkennt, daß bei der Kraft P_s eine Verzweigung eintritt. Wenn $P_1 \longrightarrow \infty$ geht, wird $\varphi = \pm\pi$.

Als Eigenwert- oder Verzweigungsproblem aufgefaßt, führt dieses Beispiel, wenn man vom eingespannten Ende aus eine x-Achse in die Wellenachse legt und mit φ den Torsionswinkel an der Stelle x bezeichnet, auf den Ansatz

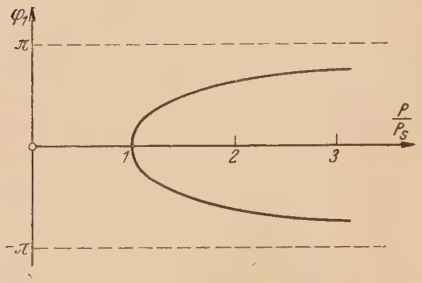


Abb. 2. Torsionsscherungs-Diagramm der Welle.

$$\alpha(x)\,\frac{d\varphi}{dx} = a\,P \sin\varphi_1 \qquad \text{mit } \varphi = 0 \text{ für } x = 0\,, \tag{4}$$

wobei die Torsionssteifigkeit $\alpha(x)$ längs der Welle (schwach) veränderlich sein darf. Das zugehörige Integral

$$\varphi = a\,P \sin\varphi_1 \int_0^x \frac{dx}{\alpha(x)} \tag{5}$$

liefert für $x = x_1$

$$\varphi_1 = a\,P \sin\varphi_1 \int_0^{x_1} \frac{dx}{\alpha(x)}\,, \tag{6}$$

also entweder $\varphi_1 = 0$ für alle Werte von P oder $|\varphi_1| \geqq 0$ für

$$P_1 = \frac{\bar{\alpha}}{a\,x_1}\,\frac{\varphi_1}{\sin\varphi_1} \qquad \text{mit } \frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} \frac{dx}{\alpha(x)}\,, \tag{7}$$

im Einklang mit (2). Die Verzweigungsstelle der Kraft ist P_s (3) (mit $\bar{\alpha}$ statt α), und dieser Wert tritt als Eigenwert auf, wenn man (4) mit $\sin\varphi_1 \approx \varphi_1$ linearisiert.

Voraussetzung für die Gültigkeit der Lösung (2) ist, daß das Torsionsmoment $M_1 = \alpha\varphi_1/x_1$ unter dem Wert des Knickmoments $M' = 2\pi\beta/x_1$ der Welle bleibt, wo β die Biegesteifigkeit ist. Dies führt für kreiszylindrische Wellen wegen $\beta/\alpha = 1+\nu$, wo ν die *Poisson*sche Zahl ist, auf die stets erfüllte Bedingung $\varphi_1 < 2\pi(1+\nu)$. Außerdem muß vorausgesetzt werden, daß die zu P_1 gehörenden Torsionsspannungen noch im *Hooke*schen Bereich liegen.

Abb. 3. Torsionsscherung einer Welle.

Wenn die Kräfte P gemäß Abb. 3 durch Schubstangen von der Länge b auf die Welle übertragen werden und in Führungen laufen, so kommen im wesentlichen die gleichen Ergebnisse, falls b nicht zu klein gewählt wird. Die Formel (2) wird zwar etwas umständlicher, am Eigen- und Verzweigungswert (3) ist aber lediglich a zu ersetzen durch $a(1+a/2b)$.

Außerdem kann man natürlich in jedem Falle die Welle durch eine Spiralfeder von der Steifigkeit α/x_1 ersetzen, wenn man dabei jede Auslenkung aus der Federebene verhindert.

3. Das Eigenwert- und Verzweigungsproblem zweiter Art. Nach diesem einfachsten Beispiel eines Scherproblems wenden wir uns dem allgemeinen Falle zu. Während die gewöhnlichen Eigenwertprobleme (erster Art) in der Regel durch eine Differentialgleichung von der Form $L(y) = \lambda M(y)$ nebst Randbedingungen definiert werden[1], worin λ der Eigenwert ist und L und M lineare homogene Differentialoperatoren von gerader Ordnung sind, so werden die hier zu untersuchenden Eigenwert- und Verzweigungsprobleme zweiter Art gekennzeichnet durch Differentialgleichungen von der Form

$$L(y) = F(\lambda, x, y_1, y_1', \ldots) \quad \text{mit} \quad y_1 = y(x_1),\ y_1' = y'(x_1), \ldots \tag{8}$$

nebst Randbedingungen, wobei L ein Differentialoperator ist, der auch von ungerader Ordnung sein darf und die unabhängige Variable x enthalten kann, wogegen F die abhängige Variable y nicht enthält, wohl aber mindestens einen der Werte $y_1, y_1', \ldots$ der abhängigen Variablen und ihrer Ableitungen an der Stelle x_1, die nicht unbedingt am Rande liegen muß.

Ist das den Randbedingungen genügende Integral von (8)

$$y = G(\lambda, x, y_1, y_1', \ldots)\,, \tag{9}$$

so liegt ein Eigenwertproblem zweiter Art vor, falls G linear homogen in $y_1, y_1', \ldots$ ist; ein Ver-

[1] Es gibt auch noch allgemeinere Formen.

zweigungsproblem kann vorliegen, falls G nicht linear in $y_1, y_1', \ldots$ ist, aber wenigstens mit $y_1 = y_1' = \ldots = 0$ identisch verschwindet.

Ist insbesondere G von der Form

$$G = \lambda\,[y_1 p_0(x) + y_1' p_1(x) + \cdots]\,, \tag{10}$$

so gilt

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda\,[y_1 p_0(x_1) + y_1' p_1(x_1) + \cdots]\,, \\ y_1' &= \lambda\,[y_1 p_0'(x_1) + y_1' p_1'(x_1) + \cdots]\,, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und die Eigenwerte λ sind somit die Wurzeln der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda p_0(x_1) - 1 & \lambda p_1(x_1) & \ldots \\ \lambda p_0'(x_1) & \lambda p_1'(x_1) - 1 & \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0\,. \tag{12}$$

Im Gegensatz zu den Eigenwertproblemen erster Art für kontinuierliche Systeme, wo in der Regel unendlich viele (allerdings nicht immer lauter brauchbare, z. B. positive) Eigenwerte λ vorhanden sind, gibt es hier auch bei kontinuierlichen Systemen nur eine endliche, in der Regel sogar sehr kleine Anzahl von Eigenwerten.

Eliminiert man $y_1', \ldots$ aus (10) und der zweiten sowie den etwa noch folgenden Gleichungen (11), so erscheint die Eigenfunktion in der Form

$$y = y_1\, H(\lambda, x) \tag{13}$$

mit willkürlichem Wert y_1.

Wenn G nicht linear in $y_1, y_1' \ldots$, aber zugleich mit $y_1, y_1', \ldots$ verschwindend ist, so eliminiert man $y_1', \ldots$ aus (9) und aus $y_1' = (\partial G/\partial x)_{x=x_1}, \ldots$ und erhält

$$y = K(\lambda, x, y_1) \quad \text{mit} \quad K \equiv 0 \text{ für } y_1 = 0 \tag{14}$$

und somit

$$y_1 = K(\lambda, x_1, y_1)\,, \tag{15}$$

und dies besagt, daß $y_1 = 0$ und folglich $y \equiv 0$ für alle Werte von λ möglich ist (trivialer Fall), daß aber auch Lösungen $y_1 \neq 0$ und also $y \not\equiv 0$ existieren können, falls λ geeignet gewählt wird.

Um die Bestimmungsgleichung für den oder die zu $y_1 \neq 0$ gehörenden Werte λ zu finden, darf man voraussetzen, daß für $\lambda = 0$ auch $K \equiv 0$ wird, und daß mit zunehmendem λ auch $|K|$ monoton wächst. Denkt man sich dann, was für technische Scherprobleme stets erlaubt sein wird, K in eine Potenzreihe nach y_1 entwickelt, so erhält man wegen $K \equiv 0$ für $y_1 = 0$

$$y_1 = y_1 \left(\frac{\partial K}{\partial y_1}\right)_0 + \frac{y_1^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial y_1^2}\right)_0 + \cdots \qquad \text{mit } x = x_1\,.$$

Damit ein Verzweigungspunkt vorhanden ist, muß diese Gleichung für von Null verschiedene, aber unendlich klein werdende y_1, neben denen höhere Potenzen von y_1 vernachlässigbar sind, erfüllt werden, und dies ist der Fall, wenn

$$\left(\frac{\partial K(\lambda, x_1, y_1)}{\partial y_1}\right)_{y_1=0} = 1 \tag{16}$$

wird. Dies ist die gesuchte Bestimmungsgleichung für den oder die Verzweigungswerte λ.

Ist insbesondere

$$K(\lambda, x, y_1) = \lambda \cdot K^*(x, y_1)\,, \tag{17}$$

so wird der einzige Verzweigungswert

$$\lambda_s = 1 : \left(\frac{\partial K^*(x_1, y_1)}{\partial y_1}\right)_{y_1=0}\,. \tag{18}$$

Die folgenden Beispiele werden diese allgemeine Theorie (die man leicht auch schon an Hand von Ziff. 2 bestätigt) erläutern. Von einer etwas allgemeineren Ausgangsform als (8) wird in Ziff. 8 noch die Rede sein.

4. Zug- und Druckscherung von Stäben und Schraubenfedern. Bei der Anordnung nach Abb. 4 wird ein Stab durch eine Zug-(Druck-) Kraft $2P \operatorname{tg} \psi_1 = 2\,P y_1 / \sqrt{b^2 - y_1^2}$ beansprucht. Ist $\delta(x)$ seine (möglicherweise schwach veränderliche) Zugsteifigkeit, so gilt also für die Verschiebung y des Querschnitts x

$$\delta(x)\,\frac{dy}{dx} = 2P\,\frac{y_1}{\sqrt{b^2 - y_1^2}} \tag{19}$$

mit der Randbedingung $y=0$ für $x=0$. Das Integral

$$y=2P\frac{y_1}{\sqrt{b^2-y_1^2}}\int_0^x\frac{dx}{\delta(x)} \tag{20}$$

führt nach der Linearisierung $\sqrt{b^2-y_1^2}\approx b$ auf den Eigenwert

$$P_s=\frac{b\bar{\delta}}{2x_1}\qquad\text{mit}\quad\frac{1}{\bar{\delta}}=\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1}\frac{dx}{\delta(x)}\,, \tag{21}$$

bei welchem Zugscherung oder Druckscherung mit Stabverlängerung oder -verkürzung eintritt.

Um den Verlauf der Scherung zu verfolgen, schreibt man (20) mit $x=x_1$ und dem Wert P_s (21) in der Form

$$y_1=\frac{P}{P_s}\frac{y_1}{\sqrt{1-(y_1/b)^2}}\,, \tag{22}$$

und dies ist in der Tat eine Verzweigung an der Stelle $P=P_s$ [in Übereinstimmung mit (18)]. Überschreitet P den Wert P_s, so existiert zufolge (22) (außer $y_1=0$) keine Gleichgewichtslage mehr: der Stab verlängert oder verkürzt sich sprunghaft bis zu einem etwaigen Anschlag.

Das Scherdiagramm nach (22) zeigt Abb. 5; es ist in den Koordinaten $\xi=P/P_s$ und $\eta=y_1/b$ ein Halbkreis vom Halbmesser 1. In der Tat ist, sobald die Verlängerung oder Verkürzung $y_1=b$

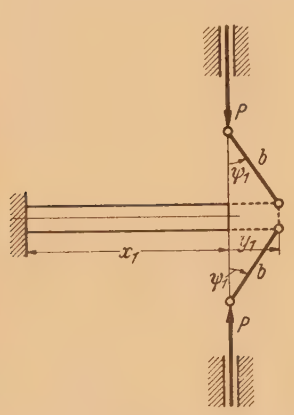


Abb. 4. Zugscherung eines Stabes.

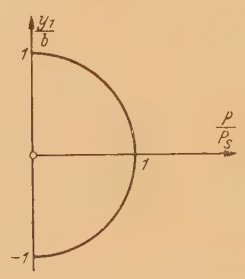


Abb. 5. Zug- (Druck-) Scherungs-Diagramm des Stabes.

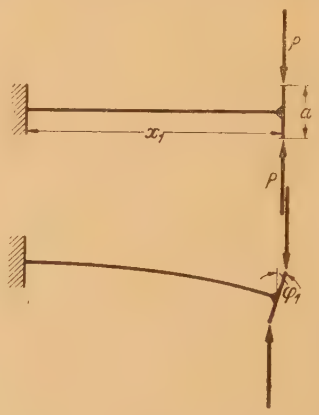


Abb. 6. Biegescherung eines Stabes.

des Stabes erreicht und also der Winkel ψ_1 in Abb. 4 zu 90^0 geworden ist, eine beliebig kleine Kraft P imstande, diesen Zustand aufrecht zu erhalten. Läßt man dann den Winkel ψ_1 und mit ihm y_1 stetig abnehmen, so muß die Kraft stetig wachsen, bis sie mit $|y_1|\longrightarrow 0$ beim Wert $P=P_s$ angelangt ist. Nunmehr kann man die Kraft P wieder entfernen.

Bei gewöhnlichen Stäben läßt sich die Zug- oder Druckscherung höchstens für sehr kleine Stangenlängen b verwirklichen, da die erforderliche Kraft P_s sonst aus dem *Hooke*schen Bereich heraustritt; dagegen kann bei Schraubenfedern (statt Stäben) dieser Scherungsvorgang recht wohl zu nützlichen Anwendungen führen.

5. Biegescherung von Stäben. Bei Stäben kann eine Biegescherung in mannigfacher Art hervorgerufen werden. Wir wollen einige Fälle betrachten.

a) Ein links eingespannter Stab trage rechts ein Paar von Kräften P, die senkrecht zur unverbogenen Stabachse an einer starren Querstange von der Länge a angreifen, die hier und im folgenden nur der Deutlichkeit halber als über den Querschnitt hinausragend dargestellt ist (Abb. 6), aber auch einfach ein Teil des Stabquerschnitts sein kann. Mit der Stablänge x_1 und der Biegesteifigkeit β erhält man für den Ausschlagwinkel φ_1 als Ausdruck für die Gleichheit des Biegemoments mit dem Moment der Kräfte P

$$\frac{\beta}{x_1}\varphi_1=aP\sin\varphi_1\,, \tag{23}$$

also dieselbe Gleichung wie in Ziff. 2. Die Ergebnisse der dort behandelten Torsionsscherung können daher (mit β statt α) sämtlich auf die Biegescherung übertragen werden, für Stahlbänder unter günstigen Umständen sogar bis zu dem für $P\longrightarrow\infty$ erreichbaren Wert $\varphi_1=\pi$, wobei das Band dann zu einem Halbkreisbogen verformt ist.

Das gleiche Ergebnis kommt für den Fall, daß die starre Stange a in der Endtangente des Stabes liegt und die Kräfte P die ursprüngliche Richtung der Stabachse beibehalten (Abb. 7), und allgemein, wenn die Stange a mit der Endtangente einen beliebigen Winkel γ in der Ebene der Stabachse und der Kräfte P bildet und die Kräfte P auch hier die ursprüngliche Richtung der Stange beibehalten. In allen diesen Fällen ist die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{\beta}{a\,x_1}\,. \tag{24}$$

b) Ist der Stab beiderseits drehbar gelagert, und wirkt am einen Ende das Paar von Kräften P (Abb. 8), so hat man in den Lagern ein Kräftepaar (Q, Q) mit $Q\,x_1 = a\,P(\;\;y_1')$ hinzuzunehmen. Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf unveränderliche Biegesteifigkeit β und kleine Biegungen y, so hat man den Ansatz

$$\beta\,y'' = -\,Q\,x = \frac{a\,P}{x_1}\,y_1'\,x$$

mit den Randbedingungen $y=0$ für $x=0$ und $x=x_1$ und also die Lösung

$$y = -\frac{a\,P}{6\,\beta\,x_1}\,y_1'\,x(x_1^2 - x^2)\,,$$

$$y' = -\frac{a\,P}{6\,\beta\,x_1}\,y_1'(x_1^2 - 3\,x^2)\,,$$

Abb. 7. Biegescherung eines Stabes.

und dies führt mit $y_1' = a\,x_1\,P\,y_1'/3\,\beta$ zu der Biegescherkraft

$$P_s = \frac{3\,\beta}{a\,x_1}\,. \tag{25}$$

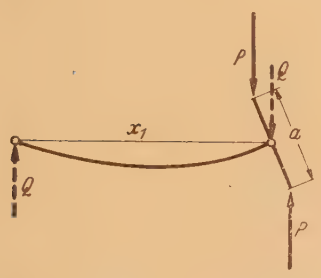


Abb. 8. Biegescherung eines Stabes.

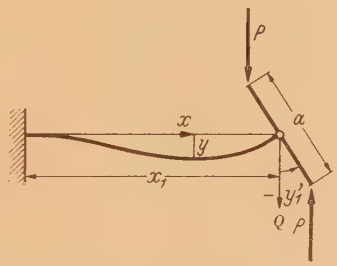


Abb. 9. Biegescherung eines Stabes.

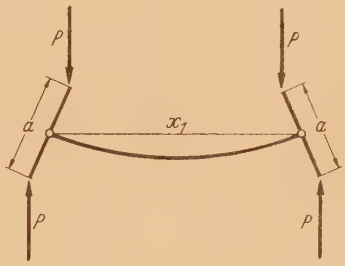


Abb. 10. Doppelte Biegescherung eines Stabes.

c) Ist der Stab links eingespannt und rechts, am Ort der Scherkräfte P, drehbar aufgelegt (Abb. 9), so verläuft die Rechnung mit einer zunächst unbekannten Stützkraft Q im rechten Lager und also ausgehend von dem Ansatz

$$\beta\,y'' = Q\,(x_1 - x) - a\,P\,(-\,y_1')$$

nebst den Randbedingungen $y = y' = 0$ für $x=0$ und $y=0$ für $x=x_1$ ganz ähnlich wie im Falle b) und liefert die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{4\,\beta}{a\,x_1}\,. \tag{26}$$

d) Wenn man den beiderseits drehbar gelagerten Stab beiderseits mit Kräftepaaren (P, P) belegt (Abb. 10), so kommt die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{2\,\beta}{a\,x_1}\,, \tag{27}$$

wie man durch Vergleichen von Abb. 6 und 10 aus (24) mit $\frac{1}{2}\,x_1$ statt x_1 entnimmt. (Eine zweite mögliche Biegescherung bei dieser Doppelbelastung wird in Ziff. 7 untersucht werden.)

Es ist bemerkenswert, daß die vier Biegescherkräfte (24), (27), (25) und (26) sich bei gleichen Werten von β, a und x_1 wie 1:2:3:4 verhalten.

e) Nun möge der beiderseits drehbar gelagerte Stab von der Länge x_2 in der Entfernung $x_1 < x_2$ vom linken Ende durch die (auf der ursprünglichen Stabachse senkrechten) Scherkräfte P angegriffen werden (Abb. 11). Das (durch β geteilte) Biegemoment M ist eine Zackenfunktion, die an der Stelle $x = x_1$ den Sprung $-\lambda\,y_1'$ macht, wenn man die Abkürzung

$$\lambda = \frac{a\,P}{\beta} \tag{28}$$

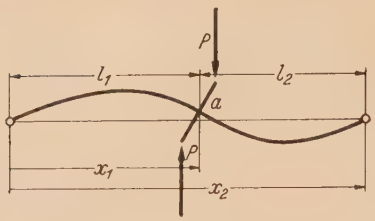


Abb. 11. Biegescherung eines Stabes.

benützt. Mithin lautet der Ansatz (8)

$$y'' = F(\lambda, x, y_1') \tag{29}$$

mit

$$F(\lambda, x, y_1') = \begin{cases} \lambda y_1' \dfrac{x}{x_2} & \text{für } 0 \leqq x \leqq x_1, \\ \lambda y_1' \left(\dfrac{x}{x_2} - 1\right) & \text{für } x_1 < x \leqq x_2. \end{cases} \tag{30}$$

Das zu den Randbedingungen $y=0$ für $x=0$ und $x=x_2$ gehörende Integral von (29) ist

$$y = \lambda y_1' \left[\frac{x^3}{6\,x_2} + x\left(\frac{x_1^2}{2\,x_2} + \frac{x_2}{3} - x_1\right) + f(x)\right] \tag{31}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq x_1, \\ x_1\,x - \frac{1}{2}(x^2 + x_1^2) & \text{für } x_1 < x \leqq x_2 \end{cases} \tag{32}$$

und also

$$y' = \lambda y_1' \left[\frac{x^2 + x_1^2}{2\,x_2} + \frac{x_2}{3} - x_1 + f'(x)\right]. \tag{33}$$

Dies gibt an der Stelle $x = x_1$

$$y_1' = \lambda y_1' \frac{x_2^2 - 3\,x_1(x_2 - x_1)}{3\,x_2},$$

woraus der Eigenwert

$$\lambda = \frac{3\,x_2}{x_2^2 - 3\,x_1(x_2 - x_1)} \tag{34}$$

folgt. Das bedeutet gemäß (28) und mit den beiden Stababschnitten $x_1 = l_1$ und $x_2 - x_1 = l_2$ eine Biegescherkraft

$$P_s = \frac{3\,\beta}{a}\,\frac{l_1 + l_2}{l_1^2 - l_1\,l_2 + l_2^2}. \tag{35}$$

f) Wenn derselbe Stab links eingespannt ist (Abb. 12), so hat man mit einem zunächst noch unbestimmten Einspannmoment $-M_0$ statt (30)

$$F(\lambda, x, y_1') = \begin{cases} \left(\lambda y_1' + \dfrac{M_0}{\beta}\right)\dfrac{x}{x_2} - \dfrac{M_0}{\beta} & \text{für } 0 \leqq x \leqq x_1, \\ \left(\lambda y_1' + \dfrac{M_0}{\beta}\right)\left(\dfrac{x}{x_2} - 1\right) & \text{für } x_1 < x \leqq x_2 \end{cases} \tag{36}$$

und findet mit den zugehörigen Randbedingungen $y=0$ für $x=0$ und $x=x_2$ sowie $y'=0$ für $x=0$

$$y = \lambda y_1' \left[\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x}{3\,x_2}\right)\left(1 - 3\,\frac{x_1}{x_2} + \frac{3}{2}\,\frac{x_1^2}{x_2^2}\right) + \frac{x^3}{6\,x_2} + f(x)\right] \tag{37}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, \\ x_1\,x - \frac{1}{2}(x^2 + x_1^2). \end{cases} \tag{38}$$

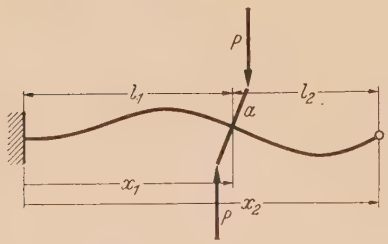


Abb. 12. Biegescherung eines Stabes.

Aus y' folgt dann vollends der Eigenwert

$$\lambda = \frac{4\,x_2^3}{x_1(4\,x_2^3 - 12\,x_1\,x_2^2 + 12\,x_1^2\,x_2 - 3\,x_1^3)}, \tag{39}$$

der sich mit $x_1 = l_1$ und $x_2 - x_1 = l_2$ in die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{4\,\beta}{a}\,\frac{(l_1 + l_2)^3}{l_1(l_1^3 + 4\,l_2^3)} \tag{40}$$

umrechnet.

g) Bei beiderseitiger Einspannung des Stabes erhält man in ähnlicher Weise

$$\lambda = \frac{x_2^3}{x_1(x_2^3 - 4\,x_1\,x_2^2 + 6\,x_1^2\,x_2 - 3\,x_1^3)} \tag{41}$$

und daraus die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{\beta}{a}\,\frac{(l_1 + l_2)^3}{l_1\,l_2(l_1^2 - l_1\,l_2 + l_2^2)}. \tag{42}$$

h) Während in den bisherigen Beispielen für die Biegescherung das Schermoment proportional zu y_1' war, wollen wir es nun als proportional zu y_1 annehmen. Die Verwirklichung ist auf mannigfache Art möglich, z. B. nach Abb. 13, wo der links eingespannte Stab rechts eine starre Querstange trägt, von deren Enden ein Seil über eine Rolle geht, an deren Achse die eine der beiden Kräfte P in einer Führung angreift, so daß sie in der ursprünglichen Stabachse bleibt, während die andere Kraft P am Stabende sitzt. Man hat hier den Ansatz

$$\beta y'' = P y_1 \tag{43}$$

und erhält

$$y = P y_1 \int_0^x \int_0^x \frac{dx^2}{\beta(x)} \tag{44}$$

und hieraus die Biegescherkraft

$$P_s = 1 : \int_0^{x_1} \int_0^x \frac{dx^2}{\beta(x)}, \tag{45}$$

insbesondere für unveränderliche Biegesteifigkeit β einfach

$$P_s = \frac{2\beta}{x_1^2}. \tag{46}$$

Diese Scherkraft ist kleiner als die zugehörige *Euler*sche Knicklast $P_k = \pi^2 \beta / 4 x_1^2$, und man hat das paradox anmutende Ergebnis, daß infolge der hinzutretenden Zugkraft P (die an der Rolle angreift) die Knicksicherheit des Stabes herabgesetzt wird.

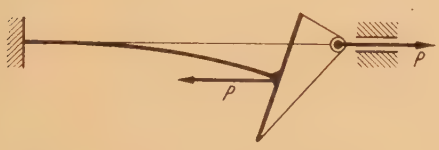


Abb. 13. Schermoment proportional zu y_1.

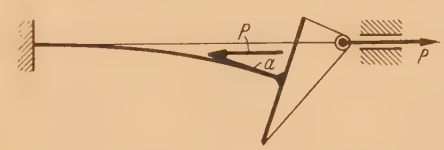


Abb. 14. Schermoment proportional zu $(y_1 - a y_1')$.

i) Zum allgemeinen Fall von Ziff. **3** führt eine Anordnung nach Abb. 14, wo das freie Stabende außer einer starren Querstange, die die Zugkraft P vermittelt, noch eine mit der Endtangente der Stabachse verbundene Längsstange von der Länge a trägt, an deren Ende die Druckkraft P angreift. Das Biegemoment ist hier gleich $P(y_1 - a y_1')$, und so kommt der Ansatz

$$\beta y'' = P(y_1 - a y_1'). \tag{47}$$

Er liefert für unveränderliche Biegesteifigkeit β folgende Form der Gleichungen (11) von Ziff. **3**:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda (y_1 - a y_1') \frac{x_1^2}{2}, \\ y_1' &= \lambda (y_1 - a y_1') x_1 \end{aligned}\right\} \text{ mit } \lambda = \frac{P}{\beta}.$$

Die zugehörige Determinantengleichung (12) gibt aufgelöst

$$\lambda = \frac{2}{x_1 (x_1 - 2a)}, \tag{48}$$

also die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{2\beta}{x_1^2 \left(1 - 2\frac{a}{x_1}\right)}. \tag{49}$$

Der Vergleich mit (46) zeigt, daß durch die Längsstange die Biegescherkraft erhöht wird, solange $0 < a \leqq \frac{1}{2} x_1$ ist. Wählt man $a = \frac{1}{2} x_1$, also gleich der halben Stablänge, so wird $P_s = \infty$, die Biegescherung also vollständig verhindert. Die Erklärung liegt darin, daß dann der Endpunkt der Längsstange (im Rahmen der Genauigkeit der linearisierten Rechnung) auch bei einer zufälligen Auslenkung y_1 gerade auf der ursprünglichen Stabachse liegen bleibt. Ist $a > \frac{1}{2} x_1$, so wird $P_s < 0$; die Biegescherung tritt dann also bei Kräften P_s ein, die umgekehrt als wie in Abb. 14 gerichtet sind.

k) Schließlich sei noch die durch Abb. 15 perspektivisch skizzierte Biegescherung erwähnt, bei welcher (mit Beschränkung auf kleine Auslenkungen) die Endkraft $Q = 2Py_1/b$ auftritt, so daß der Ansatz lautet

$$\beta y'' = \frac{2Py_1}{b}(x_1 - x)\,. \tag{50}$$

Man findet daraus die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{3b\beta}{2x_1^3}\,. \tag{51}$$

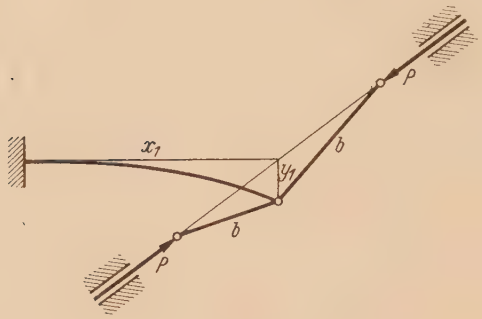


Abb. 15. Biegescherung eines Stabes.

Abb. 16. Knickung eines Stabes durch Zug.

6. Stabknickung durch Zugkräfte. Man wird von dem vorletzten Beispiel auf eine naheliegende Anordnung geführt, die ein aus erster und zweiter Art gemischtes Eigenwertproblem definiert und durch Abb. 16 dargestellt ist. Dieser Fall ist bemerkenswert: er zeigt, daß ein Stab auch durch Zugkräfte geknickt werden kann. Denkt man sich außer den Zugkräften P die beiden sich aufhebenden Kräfte $P' = P$ am Stabende $x = x_1$ hinzugefügt, so erkennt man, daß das Biegemoment an der Stelle x den Wert $Py - aP(-y_1')$ hat. Somit lautet der Ansatz

$$y'' = \alpha^2(y + ay_1') \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{P}{\beta}\,. \tag{52}$$

Das allgemeine Integral

$$y = A\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x + B\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x - ay_1'$$

liefert mit den Randbedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = x_1$

$$A = ay_1', \qquad B = ay_1'\frac{1 - \mathfrak{Cof}\,\alpha x_1}{\mathfrak{Sin}\,\alpha x_1} = -ay_1'\,\mathfrak{Tg}\frac{\alpha x_1}{2}\,,$$

so daß

$$y' = \alpha a y_1'\left(\mathfrak{Sin}\,\alpha x - \mathfrak{Tg}\frac{\alpha x_1}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x\right)$$

wird. Dies gibt

$$y_1' = \alpha a y_1'\left(\mathfrak{Sin}\,\alpha x_1 - \mathfrak{Tg}\frac{\alpha x_1}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x_1\right) = \alpha a y_1'\,\mathfrak{Tg}\frac{\alpha x_1}{2}$$

und somit für α die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha x_1}{2}\right)\mathfrak{Tg}\frac{\alpha x_1}{2} = \frac{x_1}{2a}\,. \tag{53}$$

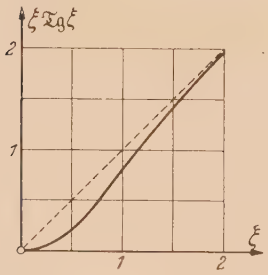


Abb. 17. Die Kurve $\eta = \xi\,\mathfrak{Tg}\,\xi$.

Sie läßt sich mit $\xi = \frac{1}{2}\alpha x_1$ an Hand von Abb. 17 graphisch lösen. Für große Werte $x_1/2a$ ist genähert $\mathfrak{Tg}\frac{\alpha x_1}{2} \approx 1$ und also $\alpha \approx 1/a$ oder die Knickkraft

$$P_k \approx \frac{\beta}{a^2} \qquad (x_1 \gg 2a)\,. \tag{54a}$$

Für kleine Werte von $x_1/2a$ kommt wegen $\xi\,\mathfrak{Tg}\,\xi \approx \xi^2$

$$P_k \approx \frac{2\beta}{a x_1} \qquad (x_1 \ll 2a)\,. \tag{54b}$$

7. Ein Problem mit zwei Scherkräften. Man kann leicht Beispiele finden, bei denen mehr als ein Paar von Scherkräften auftritt. Einen einfachen Fall zeigt Abb. 18 als Verallgemeinerung von Abb. 10. Außer den Scherkräften P_0 und P_1 hat man in den Lagern ein Paar von Stützkräften Q, für welche

$$Qx_1 = a_0 P_0 y_0' - a_1 P_1(-y_1')$$

ist. Der Ansatz

$$\beta y'' = Qx - a_0 P_0 y_0' = (a_0 P_0 y_0' + a_1 P_1 y_1')\frac{x}{x_1} - a_0 P_0 y_0' \tag{55}$$

liefert mit den Randbedingungen $y=0$ für $x=0$ und $x=x_1$

$$\beta y = (a_0 P_0 y_0' + a_1 P_1 y_1') \frac{x^3}{6 x_1} - a_0 P_0 y_0' \frac{x^2}{2} + \\ + \left(\frac{1}{3} a_0 P_0 y_0' - \frac{1}{6} a_1 P_1 y_1'\right) x_1 x ,$$

und dies führt auf

$$\left.\begin{aligned} \beta y_0' &= \frac{1}{3} a_0 P_0 x_1 y_0' - \frac{1}{6} a_1 P_1 x_1 y_1' , \\ \beta y_1' &= -\frac{1}{6} a_0 P_0 x_1 y_0' + \frac{1}{3} a_1 P_1 x_1 y_1' . \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

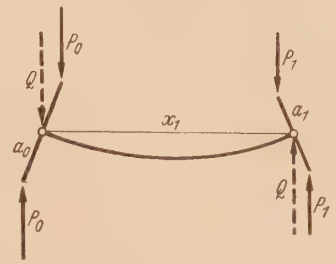


Abb. 18. Doppelte Biegescherung eines Stabes.

Die gleich Null gesetzte Determinante der Koeffizienten von y_0' und y_1' erzeugt die Scherbedingung

$$\xi\eta - 4\xi - 4\eta + 12 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \xi = \frac{a_0 P_0 x_1}{\beta} , \quad \eta = \frac{a_1 P_1 x_1}{\beta} , \qquad (57)$$

und diese wird in einem kartesischen (ξ, η)-System durch eine Hyperbel mit den Asymptoten $\xi=4$ und $\eta=4$ dargestellt (Abb. 19). Eine Biegescherung wird jedesmal dann hervorgerufen, wenn die beiden Kräftepaare (P_0, P_0) und (P_1, P_1), die auch negative Werte annehmen dürfen (Zug statt Druck), so aufeinander abgestimmt sind, daß ihre Werte ξ und η einen Hyperbelpunkt bilden; und zwar geben die dem linken Hyperbelzweig angehörenden Wertepaare (P_0, P_1) Scherformen nach Abb. 18, die dem rechten Zweig angehörenden Wertepaare (P_0, P_1) dagegen Scherformen mit Wendepunkt gemäß Abb. 20, wie man erkennt, wenn man etwa die erste Gleichung (56) in der Gestalt

$$y_1' = 2\, y_0' \frac{\xi - 3}{\eta}$$

schreibt. Setzt man $y_0' > 0$ voraus, so wird, wie man leicht nachprüft, $y_1' < 0$ für alle Punkte (ξ, η) des linken Hyperbelzweiges, dagegen $y_1' > 0$ für alle Punkte (ξ, η) des rechten.

Wird $a_0 P_0 = a_1 P_1$, also $\xi = \eta$, so wird entweder $\xi = \eta = 2$ oder $\xi = \eta = 6$. Der erste Fall ist identisch mit dem Beispiel d) von Ziff. 5, den zweiten Fall hatten wir dort in Aussicht gestellt.

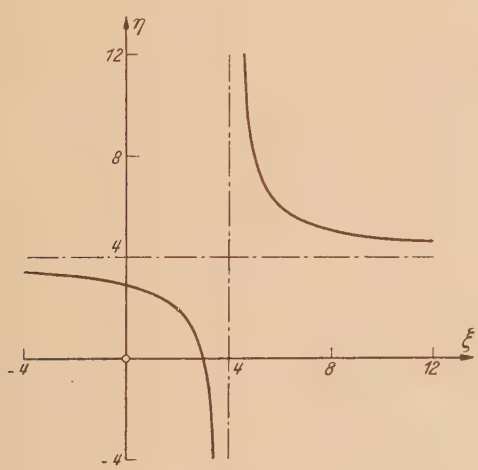


Abb. 19. Scherbedingung der doppelten Biegescherung.

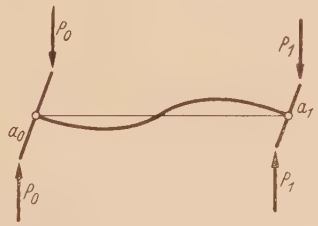


Abb. 20. Scherformen mit Wendepunkt.

8. Biegescherung von Platten. Man hätte das Biegescherproblem des Beispiels b) von Ziff. 5 auch so lösen können, daß man statt von dem Ansatz $\beta y'' = a P y_1' x / x_1$, dessen rechte Seite y_1' enthält, von dem allgemeinen Ansatz für Stäbe ohne kontinuierliche Last $y'''' = 0$ ausgegangen wäre und die vier auftretenden Integrationskonstanten durch die zwei geometrischen Randbedingungen $y_0 = 0$ und $y_1 = 0$ und durch die zwei dynamischen Randbedingungen $y_0'' = 0$ und $\beta y_1'' = a P y_1'$ bestimmt hätte, deren letzte das Problem zu einem Eigenwertproblem zweiter Art stempelt. Man überzeugt sich durch eine kurze Rechnung davon, daß auch so das frühere Ergebnis (25) für die Biegescherkraft kommt.

Bei Biegescherproblemen von Platten empfiehlt sich dieser zweite Weg. Wie zeigen ihn an vier Beispielen auf.

a) Eine Kreisplatte vom Halbmesser r_1 und der Dicke h (Abb. 21) trage an ihrem Außenrand zwei entgegengesetzt gleiche, kontinuierlich und gleichmäßig verteilte Ringlasten von der Größe p je Längeneinheit des Randes, welche an einem Ring von der Breite a angreifen. Der Ring soll, wenn er bei der Biegescherung der Platte umgestülpt wird, von sich aus keinen zusätzlichen Umstülpwiderstand ausüben, also etwa aus hinreichend dicht liegenden starren Stäben oder einfach aus dem Plattenrand selbst bestehen.

Die Differentialgleichung für die Durchbiegung z der Kreisplatte ohne Last

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dz}{dr}\right)\right]=0 \tag{58}$$

hat das allgemeine Integral

$$z=A+Br^2+C\ln r\,. \tag{59}$$

Für Kreisplatten ohne Mittelbohrung muß $C=0$ sein. Die geometrische Randbedingung $z=0$ für $r=r_1$ verwandelt dann das Integral (59) in

$$z=-B(r_1^2-r^2)\,. \tag{60}$$

Auf einen Sektor vom Zentriwinkel $d\varphi$ entfällt beim Eintritt der Biegescherung ein Randmoment $apz_1'\cdot r_1 d\varphi$. Andererseits ist das von den Radialspannungen herrührende Biegemoment, sofort für den Rand angeschrieben, gleich

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(z_1''+\nu\frac{z_1'}{r_1}\right)r_1 d\varphi\,,$$

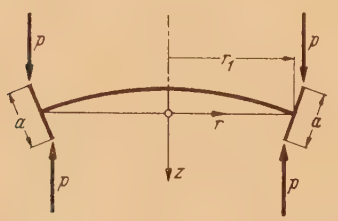


Abb. 21. Biegescherung einer Kreisplatte.

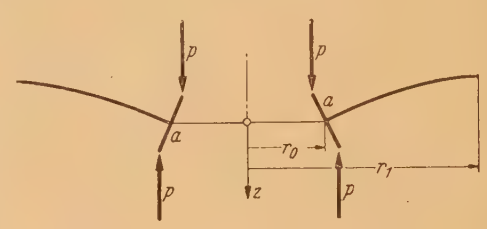


Abb. 22. Biegescherung einer Kreisringplatte.

wobei E den Elastizitätsmodul und ν die *Poisson*sche Zahl bedeutet. Die dynamische Randbedingung erfordert die Gleichheit beider Momente, und dies gibt mit (60)

$$Bapr_1=B\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\,.$$

Da mit $B=0$ auch z identisch verschwinden würde, ist eine Biegescherung nur möglich bei einer hieraus mit $B\neq 0$ folgenden Biegescherlast (je Längeneinheit)

$$p_s=\frac{Eh^3}{12(1-\nu)ar_1}\,. \tag{61}$$

b) Eine Kreisringplatte vom Innenhalbmesser r_0 und Außenhalbmesser r_1 trage am Innenrand ein Paar von Ringlasten p je Längeneinheit (Abb. 22). Die geometrische Randbedingung $z=0$ für $r=r_0$ verwandelt das allgemeine Integral (59) in

$$z=B(r^2-r_0^2)+C\ln\frac{r}{r_0}\,. \tag{62}$$

Die dynamischen Randbedingungen am Innen- und Außenrand

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(z_0''+\nu\frac{z_0'}{r_0}\right)=ap(-z_0')\,,$$

$$z_1''+\nu\frac{z_1'}{r_1}=0$$

liefern mit (62) zwei lineare homogene Gleichungen für B und C:

$$\left.\begin{aligned}2\left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}+apr_0\right]B-\left[\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}-apr_0\right]\frac{C}{r_0^2}&=0\,,\\ 2(1+\nu)B-(1-\nu)\frac{C}{r_1^2}&=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Sollen B und C nicht verschwinden und dadurch die Durchbiegung überhaupt verhindern, so muß ihre Koeffizientendeterminante Null sein, und dies liefert alsbald die Biegescherlast (je Längeneinheit)

$$p_s = \frac{Eh^3}{12\,a\,r_0}\,\frac{r_1^2 - r_0^2}{(1-\nu)\,r_0^2 + (1+\nu)\,r_1^2}\,. \tag{64}$$

Die Biegeform, d. h. die Eigenfunktion unseres Problems erhält man, wenn man C aus der zweiten Gleichung (63) in (62) einsetzt, zu

$$z = B\left(r^2 - r_0^2 + 2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,r_1^2 \ln\frac{r}{r_0}\right).$$

Da

$$z'' = -2\,B\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{r_1^2}{r^2} - 1\right)$$

in der ganzen Ringplatte das entgegengesetzte Vorzeichen von z hat, zeigt Abb. 22 den Meridianschnitt der verformten Platte richtig an.

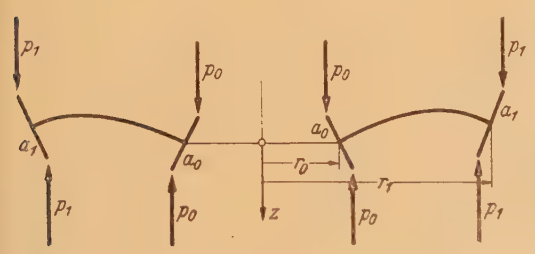


Abb. 23. Doppelte Biegescherung einer Kreisringplatte.

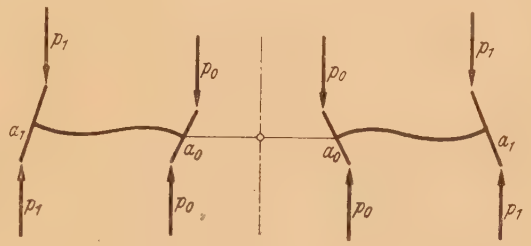


Abb. 24. Doppelte Biegescherung einer Kreisringplatte.

c) Weiter handle es sich um eine Kreisringplatte, die gemäß Abb. 23 von je einem Paar von Ringlasten p_0 und p_1 am Innen- und Außenrand angegriffen wird. Hier gelten die dynamischen Randbedingungen

$$\frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(z_0'' + \nu\,\frac{z_0'}{r_0}\right) = a_0 p_0\,(-z_0')\,,$$

$$\frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(z_1'' + \nu\,\frac{z_1'}{r_1}\right) = a_1 p_1 z_1'\,.$$

Der Ansatz (62) liefert für B und C zwei lineare homogene Gleichungen, deren erste mit der ersten Gleichung (63) identisch ist (mit $a_0 p_0$ statt ap), und deren zweite aus ihr offenbar dadurch hervorgeht, daß man r_0 und $a_0 p_0$ ersetzt durch r_1 und $-a_1 p_1$. Dies führt mit den Abkürzungen

$$\xi = \frac{12\,a_0\,r_0\,p_0}{Eh^3}\,, \qquad \eta = \frac{12\,a_1\,r_1\,p_1}{Eh^3} \tag{65}$$

auf die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} [(1-\nu)\,\xi + 1]\,r_0^2 & (1+\nu)\,\xi - 1 \\ [(1-\nu)\,\eta - 1]\,r_1^2 & (1+\nu)\,\eta + 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder aufgelöst

$$(1-\nu^2)\,\xi\eta - \frac{(1-\nu)\,r_0^2 + (1+\nu)\,r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\,\xi - \frac{(1+\nu)\,r_0^2 + (1-\nu)\,r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\,\eta + 1 = 0\,. \tag{66}$$

Diese Gleichung wird in einem kartesischen (ξ, η)-System durch eine Hyperbel dargestellt, die ebenso verläuft wie diejenige in Abb. 19, jedoch mit den Asymptoten

$$\xi = \frac{(1+\nu)\,r_0^2 + (1-\nu)\,r_1^2}{(1-\nu^2)\,(r_1^2 - r_0^2)}\,, \qquad \eta = \frac{(1-\nu)\,r_0^2 + (1+\nu)\,r_1^2}{(1-\nu^2)\,(r_1^2 - r_0^2)}\,. \tag{67}$$

Zusammengehörige Werte

$$p_0 = \frac{Eh^3}{12\,a_0\,r_0}\,\xi\,; \qquad p_1 = \frac{Eh^3}{12\,a_1\,r_1}\,\eta\,, \tag{68}$$

deren Parameter ξ und η die Gleichung (66) erfüllen, also durch Hyperbelpunkte dargestellt werden, bringen die Biegescherung der Ringplatte hervor; und zwar gehören Punkte (ξ, η) des linken Zweiges zu einer Scherform nach Abb. 23, solche des rechten Zweiges zu einer Scherform nach Abb. 24, wie man analog zu Ziff. 7 beweist.

d) Endlich behandeln wir noch den technisch wohl besonders wichtigen Fall, daß eine am Außenrand eingespannte Kreisplatte an einer starren Mittelachse befestigt ist, die durch ein Paar von (in der Entfernung a) senkrecht zur Platte wirkenden Kräften P zum Ausscheren gebracht werden kann (Abb. 25). Ist φ_0 der kleine Drehwinkel der Mittelachse beim Ausscheren, so ist das Schermoment $M = a P \varphi_0$ gleichzusetzen dem elastischen Rückstellmoment $M = \varkappa \varphi_0$ der Ringplatte, wo $\varkappa$ der Steifigkeitsfaktor bei dieser Art von Plattenbiegung ist. Mithin wird die Scherkraft $P_s = \varkappa / a$.

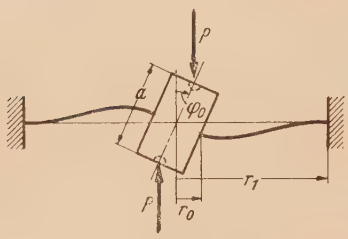


Abb. 25. Biegescherung einer Platte mit Mittelachse.

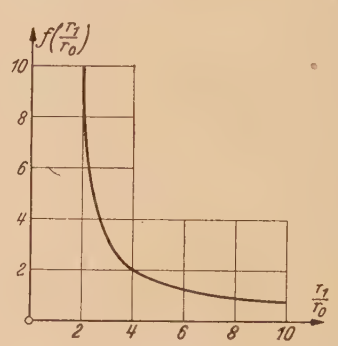


Abb. 26. Die Scherfunktion $f(r_1/r_0)$.

Bei der Berechnung des Faktors $\varkappa$ können wir uns nun glücklicherweise auf eine schon für einen anderen Zweck durchgeführte Rechnung von *H. Reißner*[1] stützen, die ein federndes Universalgelenk behandelt, bei dem die Ringplatte am Innenrand eingespannt ist, während der (eben bleibende) Außenrand um einen Durchmesser gedreht wird. Das *Reißner*sche Ergebnis läßt sich durch eine einfache Umrechnung auf unseren Fall übertragen und liefert mit $\varkappa$ die Biegescherkraft

$$P_s = \frac{\pi E h^3}{3(1-\nu^2)a} f\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \quad \text{mit} \quad f\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = 1 : \left[\ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 + 1}\right]. \tag{69}$$

Die Funktion $f(r_1/r_0)$ ist über der Abszisse r_1/r_0 in Abb. 26 aufgetragen. Sie wächst mit $r_1 \longrightarrow r$ über alle Grenzen und geht mit $r_1/r_0 \longrightarrow \infty$ gegen Null. Eine Platte mit sehr dünner, stiftartiger Achse hat also nur eine sehr kleine Scherfestigkeit.

(Eingegangen am 12. Dezember 1947.)

Anschrift des Verfassers:
Professor Dr.-Ing. Dr. *Richard Grammel*, (14a) Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101.

[1] *H. Reißner*, Ing.-Arch. 1 (1929) S. 74.

Die quadratische Platte bei Schubbelastung oberhalb der Beulgrenze.

Von T. E. Schunck.

1. Einleitung. Bei der Berechnung von Platten ist es aus mathematischen Gründen manchmal erforderlich, die Randbedingungen an den Schmalseiten zu vernachlässigen, d. h. die Platte durch einen unendlich langen Streifen zu ersetzen. So haben *Kromm* und *Marguerre* das Verhalten eines von Schub- und Druckkräften beanspruchten Plattenstreifens oberhalb der Beulgrenze[1] untersucht. Um den Einfluß der Randbedingungen an den Schmalseiten einer endlichen Platte beurteilen zu können, ist es erwünscht, einige Sonderfälle numerisch unter Berücksichtigung dieser Randbedingungen zu berechnen und das gewonnene Ergebnis mit dem für den Streifen zu vergleichen. Der größte Unterschied muß sich bei der quadratischen Platte ergeben. Es soll deshalb in der vorliegenden Arbeit eine an vollkommen dehnungs- und biegungssteifen Randträgern eingespannte quadratische Platte berechnet werden, die auf Schub über ihre Knickgrenze hinaus beansprucht wird.

2. Grundlagen der Berechnung. Für diese Untersuchung wollen wir die Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung von *Marguerre*[2] für den Grenzfall verschwindender Krümmung heranziehen. Sie wurde vom Verfasser auch für eine andere, kürzlich in dieser Zeitschrift veröffentlichte Arbeit benützt, und es sei auf die dort[3] gegebene Darstellung verwiesen.

Sind x und y rechtwinklige Koordinaten in der Plattenebene und u und v die zugehörigen Verschiebungen sowie w die Ausbiegung senkrecht zur Plattenebene, so werden die Dehnungen der Plattenmittelfläche [a. a. O. Gl. (2.04/5) für $z=0$ mit $W=0$]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \tag{2}$$

und die Gleitung [a. a. O. Gl. (2.07) für $z=0$ mit $W=0$]

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3}$$

Geht man damit in die Formänderungsenergie [a. a. O. Gl. (2.09) mit h als Plattenstärke, E als Elastizitätsmodul und ν als Querkontraktionszahl]

$$\left.\begin{aligned} A_i = {} & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[(\varepsilon_x+\varepsilon_y)^2 - 2(1-\nu)\left(\varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{\gamma^2}{4}\right)\right] dx\,dy + \\ & + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ein, so wird diese eine Funktion von u, v und w. Die Differentialgleichungen für diese Verschiebungen erhält man durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, wonach die Variationen von A_i nach u, v und w verschwinden müssen. Dies führt auf dem üblichen Weg zu den Gleichungen

$$\Delta u + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = q(w), \tag{5}$$

$$\Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = Q(w) \tag{6}$$

für die Verschiebungen in der Plattenebene und zu der Differentialgleichung für die Ausbiegung w [a. a. O. Gl. (2.16) mit $W=0$]

$$\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta w = \sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{7}$$

---

[1] *A. Kromm* u. *K. Marguerre*, Luftfahrtforschung 14 (1937) S. 627.
[2] *K. Marguerre*, Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech. Cambridge, Mass. (1939), S. 93.
[3] *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 16 (1948) S. 404.

In der letzten Gleichung sind σ_x, σ_y und τ die Spannungen in der Plattenmittelebene, die mit den oben angegebenen Dehnungen und der Gleitung gemäß

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \tag{8}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \tag{9}$$

und

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma \tag{10}$$

[a. a. O. Gl. (2.10 bis 12)] zusammenhängen.

Setzt man diese Werte in die Gleichung (7) ein, so hat man in den Gleichungen (5), (6) und (7) ein System von drei gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungen für die drei Verschiebungen.

Dieses System wollen wir schrittweise lösen, indem wir zuerst eine Ausbeulfunktion $w(x,y)$ annehmen und aus den Gleichungen (5) und (6), deren rechte Seiten $q(w)$ und $Q(w)$ nunmehr bekannt sind, die Verschiebungen u und v berechnen. Diese geben wiederum in Verbindung mit den angenommenen Ausbeulordinaten w nach den Gleichungen (8) bis (10) und (1) bis (3) Näherungswerte für die Spannungen. Mit diesen können wir aus der Gleichung (7) verbesserte Ausbeulordinaten w bestimmen, mit denen wir den Kreislauf so lange wiederholen, bis die aus zwei aufeinander folgenden Näherungen bestimmten Werte in dem gewünschten Maße übereinstimmen.

Dabei gibt es zwei Möglichkeiten, die verbesserten Ausbeulordinaten aus der Gleichung (7) zu ermitteln. Entweder setzt man auf der rechten Seite außer den Spannungen auch noch die zu verbessernden Ausbeulordinaten w ein und hat dann ein gewöhnliches Randwertproblem — mechanisch eine in bestimmter gegebener Weise belastete Platte, deren Durchbiegung gesucht wird —, oder man setzt auf der rechten Seite der genannten Gleichung nur die Spannungen ein; dann wird sie homogen und hat nur für bestimmte Eigenwerte eines Parameters — dieser ist hierbei eine der Spannungen — nicht-triviale Lösungen. Mechanisch bedeutet das Letztere die Knickgrenze einer Platte, die am Rande mit einer gesuchten Spannung (der Knickspannung) belastet ist, während über die ganze Plattenebene bestimmte gegebene Zusatzspannungen verteilt sind.

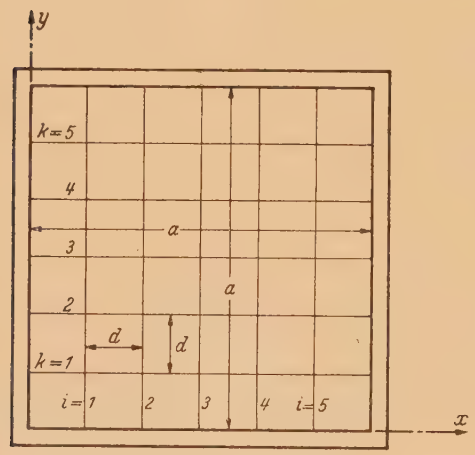


Abb. 1. Die untersuchte quadratische Platte.

3. Durchführung der Rechnung. Für diese Berechnung legen wir über die Platte von der Seitenlänge a (Abb. 1) ein Netz von äquidistanten, den Seiten parallelen Geraden mit dem Abstand $d=a/n$, wobei wir $n=6$ setzen wollen, und ersetzen die Differentialgleichungen unseres Problems durch Differenzengleichungen für die Werte in den 25 Netzpunkten auf der Platte und in den 24 Randpunkten[1]. Bezeichnen wir irgendeinen Funktionswert im Netzpunkt mit der Abszisse $x=id$ und der Ordinate $y=kd$ mit $f_{i,k}$, so werden die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion in einem festen Punkt (i, k) durch folgende finite Ausdrücke ersetzt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \longrightarrow \frac{f_{i+1,k} - f_{i-1,k}}{2d}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \longrightarrow \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k-1}}{2d}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i-1,k}}{d^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{f_{i,k+1} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}}{d^2}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \longrightarrow \frac{f_{i+1,k+1} - f_{i-1,k+1} - f_{i+1,k-1} + f_{i-1,k-1}}{4d^2}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Delta f \longrightarrow \frac{1}{d^4}\big[20 f_{i,k} - 8(f_{i+1,k} + f_{i-1,k} + f_{i,k+1} + f_{i,k-1}) + 2(f_{i+1,k+1} + f_{i-1,k-1} + \\ + f_{i+1,k-1} + f_{i-1,k+1}) + f_{i+2,k} + f_{i-2,k} + f_{i,k+2} + f_{i,k-2}\big]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

[1] Vgl. *F. Bleich* u. *E. Melan*, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzen-Gleichungen der Baustatik. Berlin und Wien 1927.

Die gesamten Verschiebungen in der Plattenebene u_g und v_g spalten wir in die Verschiebungen der Randträger und die an den Rändern verschwindenden Zusatzverschiebungen u und v auf:

$$u_g = -\varepsilon_1 x + \gamma_1 y + u\,, \tag{15}$$

$$v_g = \gamma_2 x - \varepsilon_2 y + v\,. \tag{16}$$

Da wir dehnungs- und biegungssteife Randträger vorausgesetzt hatten, ist

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0 \tag{17}$$

und die Änderung des ursprünglich rechten Winkels zwischen den Trägern

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2\,. \tag{18}$$

An die Stelle der Differentialgleichungen (5) und (6) für die Verschiebungen in der Plattenebene treten damit und mit $\nu = 1/3$ folgende Differenzengleichungen am Punkt (i, k):

$$\left.\begin{aligned} &-8\,u'_{ik} + 3\,(u'_{i+1,k} + u'_{i-1,k}) + u'_{i,k+1} + u'_{i,k-1} + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\,(v'_{i+1,k+1} - v'_{i-1,k+1} - v'_{i+1,k-1} + v'_{i-1,k-1}) = q_{ik}\,, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &-8\,v'_{ik} + 3\,(v'_{i,k+1} + v'_{i,k-1}) + v'_{i+1,k} + v'_{i-1,k} + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\,(u'_{i+1,k+1} - u'_{i-1,k+1} - u'_{i+1,k-1} + u'_{i-1,k-1}) = Q_{ik}\,, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

die wir durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$u'_{ik} = u_{ik}\,\frac{d}{w_{33}^2}\,, \tag{21}$$

$$v'_{ik} = v_{ik}\,\frac{d}{w_{33}^2} \tag{22}$$

dimensionslos gemacht haben. Der Grund dafür wird sich im Verlauf der weiteren Rechnung ergeben.

Die Werte q_{ik} und Q_{ik} auf der rechten Seite der Gleichungen (19) und (20) entsprechen Belastungen in der Plattenebene und sind durch

$$\left.\begin{aligned} q_{ik} = &\tfrac{1}{2}(\omega_{i-1,k} - \omega_{i+1,k})\,(3\,\omega_{i+1,k} + 3\,\omega_{i-1,k} + \omega_{i,k+1} + \omega_{i,k-1} - 8\,\omega_{ik}) + \\ &+ \tfrac{1}{4}(\omega_{i,k-1} - \omega_{i,k+1})\,(\omega_{i+1,k+1} - \omega_{i-1,k+1} - \omega_{i+1,k-1} + \omega_{i-1,k-1})\,, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{ik} = &\tfrac{1}{2}(\omega_{i,k-1} - \omega_{i,k+1})\,(3\,\omega_{i,k+1} + 3\,\omega_{i,k-1} + \omega_{i+1,k} + \omega_{i-1,k} - 8\,\omega_{ik}) + \\ &+ \tfrac{1}{4}(\omega_{i-1,k} - \omega_{i+1,k})\,(\omega_{i+1,k+1} - \omega_{i-1,k+1} - \omega_{i+1,k-1} + \omega_{i-1,k-1}) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

gegeben, wenn wir auch hier an Stelle der Absolutwerte der Ausbiegungen ihre auf die Ausbiegung in der Mitte bezogenen relativen Werte

$$\omega_{ik} = \frac{w_{ik}}{w_{33}} \tag{25}$$

einführen.

Die für den ersten Schritt anzunehmenden relativen Ausbiegungen ω_{ik} sollen zu den beiden Diagonalen der Platte symmetrisch sein (vgl. Tafel I). Dasselbe wird sich auch für die später zu berechnenden verbesserten Werte ergeben, so daß die scheinbaren Lasten q_{ik} und Q_{ik} die in den Tafeln II und III angegebene Symmetrie besitzen. Hieraus folgt aber wiederum eine Symmetrie der Zusatzverschiebungen u und v, wobei die u_{ik} den q_{ik} und die v_{ik} den Q_{ik} entsprechen. Es genügt also, für die ganze Platte 8 Werte u'_{ik} und 4 Werte v'_{ik} aus den 8 Gleichungen (19) für die Punkte (11), (12), (13), (14), (15), (22), (23) und (24) und den 4 Gleichungen (20) für die Punkte (12), (13), (14) und (23) zu berechnen.

Das Ergebnis dieser Rechnung gibt die Tafel IV: Dies sind die „Einflußfunktionen" für die Verschiebungen in der Plattenebene für eine in den Punkten (ik) durch — in unserem Fall fiktive — Kräfte q_{ik} in der x-Richtung und Q_{ik} in der y-Richtung belastete Platte. Die nach dem Schema der Tafel IV berechneten relativen Zusatzverschiebungen gestatten mit den angenommenen Ausbiegungen aus den Gleichungen (8) bis (10) und (1) bis (3), die wir ebenfalls in Differenzengleichungen umformen, die durch sie bedingten Spannungen zu berechnen. Sie seien „Beulzusatzspannungen" genannt.

(Die Tafeln I, II, III, IV und V siehe Seite 123.)

An Stelle dieser Spannungen berechnen wir folgende Zahlen, die wir „Grundwerte der Beulzusatzspannungen" nennen wollen:

$$\left.\begin{aligned}(s_x)_{ik} \equiv \frac{12\,d^2}{w_{33}^2}\,\frac{(\sigma_x)_{ik}(1-\nu^2)}{E} = 6\Big[u'_{i+1,k} - u'_{i-1,k} + \frac{1}{3}\,(v'_{i,k+1} - v'_{i,k-1}) + \\ + \frac{1}{4}\,(\omega_{i+1,k} - \omega_{i-1,k})^2 + \frac{1}{12}\,(\omega_{i,k+1} - \omega_{i,k-1})^2\Big]\,,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}(s_y)_{ik} \equiv \frac{12\,d^2}{w_{33}^2}\,\frac{(\sigma_y)_{ik}(1-\nu^2)}{E} = 6\Big[v'_{i,k+1} - v'_{i,k-1} + \frac{1}{3}\,(u'_{i+1,k} - u'_{i-1,k}) + \\ + \frac{1}{12}\,(\omega_{i+1,k} - \omega_{i-1,k})^2 + \frac{1}{4}\,(\omega_{i,k+1} - \omega_{i,k-1})^2\Big]\,,\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}t_{ik} = \frac{6\,d^2}{w_{33}^2}\,\frac{\tau_{ik}(1-\nu^2)}{E} = u'_{i,k+1} - u'_{i,k-1} + v'_{i+1,k} - v'_{i-1,k} + \\ + \frac{1}{2}\,(\omega_{i+1,k} - \omega_{i-1,k})\,(\omega_{i,k+1} - \omega_{i,k-1})\,.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Von diesen Zusatzspannungen sind die $(s_x)_{ik}$ in der gleichen Art wie die q_{ik}, die $(s_y)_{ik}$ so wie die Q_{ik} und die t_{ik} wie die ω_{ik} symmetrisch zu den Diagonalen der Platte.

Überlagert man den Zusatzspannungen die von den Randverschiebungen hervorgerufenen Druck- und Schubspannungen

$$p_1 = \frac{9}{8}\,E\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right), \tag{29}$$

$$p_2 = \frac{9}{8}\,E\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\,\varepsilon_1\right) \tag{30}$$

und

$$\tau_r = \frac{3}{8}\,E\gamma\,, \tag{31}$$

so erhält man die gesamten Spannungen σ_{xg}, σ_{yg} und τ_g im Blech. Auch an deren Stelle wollen wir geeignet gebildete Zahlenwerte, die Spannungszahlen, einführen:

$$(\varphi_x)_{ik} \equiv 12\,(1-\nu^2)\,\frac{\sigma_{xg}}{E}\,\frac{d^2}{h^2} = -\,12\,\frac{d^2}{h^2}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right) + \left(\frac{w_{33}}{h}\right)^2 (s_x)_{ik}\,, \tag{32}$$

$$(\varphi_y)_{ik} \equiv 12\,(1-\nu^2)\,\frac{\sigma_{yg}}{E}\,\frac{d^2}{h^2} = -\,12\,\frac{d^2}{h^2}\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\,\varepsilon_1\right) + \left(\frac{w_{33}}{h}\right)^2 (s_y)_{ik}\,, \tag{33}$$

$$\varphi_{ik} \equiv 6\,(1-\nu^2)\,\frac{\tau_g}{E}\,\frac{d^2}{h^2} = +\,2\,\frac{d^2}{h^2}\,\gamma + \left(\frac{w_{33}}{h}\right)^2 t_{ik}\,. \tag{34}$$

Die aus der Differentialgleichung (7) zur Bestimmung der verbesserten Ausbeulordinaten folgende Differenzengleichung lautet damit für einen Netzpunkt (i,k)

$$\left.\begin{aligned}20\,w_{i,k} - 8\,(w_{i+1,k} + w_{i-1,k} + w_{i,k+1} + w_{i,k-1}) + 2\,(w_{i+1,k+1} + w_{i-1,k-1} + w_{i+1,k-1} + \\ + w_{i-1,k+1}) + w_{i+2,k} + w_{i-2,k} + w_{i,k+2} + w_{i,k-2} = (\varphi_x)_{ik}\,(w_{i+1,k} - 2\,w_{i,k} + w_{i-1,k}) + \\ + (\varphi_y)_{ik}\,(w_{i,k+1} - 2\,w_{i,k} + w_{i,k-1}) + \varphi_{ik}\,(w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k-1} + w_{i-1,k-1})\,.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Wenn wir auf der rechten Seite nur für die Spannungszahlen ihre durch die Gleichungen (32) bis (34) gegebenen Näherungswerte einsetzen, ist sie in den Ausbeulordinaten homogen.

Am Rand verschwinden nicht nur die Durchbiegungen, sondern auch ihre Ableitungen, da das Blech dort eingespannt sein soll. Es muß also z. B. am linken Rand $\partial w/\partial x = 0$ sein, d. h. wir müssen dort $w_{-i,k} = w_{+i,k}$ setzen und an den anderen Rändern in entsprechender Weise die Durchbiegung mit gleichem Vorzeichen spiegeln. Schreibt man unter Beachtung dieses Umstandes und der oben festgestellten Symmetrie der Zusatzspannungen die Gleichung (35) für alle Punkte der Platte auf, so findet man, daß auch die verbesserten Ausbeulordinaten wie die angenommenen zu beiden Diagonalen symmetrisch sind. Es genügt also, 9 von ihnen mit Hilfe des in der Tafel V gegebenen Gleichungssystems von 9 homogenen Gleichungen zu berechnen. Die darin auftretenden Spannungszahlen hängen wegen der Voraussetzung $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ nur noch von der relativen Ausbeulamplitude (w_{33}/h) und der Änderung γ des Eckenwinkels ab. Letztere tritt nur in der Verbindung

$$\psi = 2\,\frac{d^2}{h^2}\,\gamma \tag{36}$$

auf. Nur für bestimmte, zusammengehörige Werte dieser Parameter haben die 9 Gleichungen eine nicht-triviale Lösung. Man findet sie und damit den Zusammenhang zwischen der Aus-

Tafel I. *Symmetrie der relativen Ausbiegungen ω_{ik}.*
(Die Spannungszahlen t_{ik} sind in der gleichen Weise symmetrisch.)

$k=$ \ $i=$	1	2	3	4	5
5	ω_{15}	ω_{14}	ω_{13}	ω_{12}	ω_{11}
4	ω_{14}	ω_{24}	ω_{23}	ω_{22}	ω_{12}
3	ω_{13}	ω_{23}	1	ω_{23}	ω_{13}
2	ω_{12}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}	ω_{14}
1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}	ω_{15}

Tafel II. *Symmetrie der scheinbaren Lasten q_{ik}.*
(Die Zusatzverschiebungen u_{ik} und die Spannungszahlen $(s_x)_{ik}$ sind in der gleichen Weise symmetrisch.)

$k=$ \ $i=$	1	2	3	4	5
5	q_{15}	$-Q_{14}$	$-Q_{13}$	$-Q_{12}$	$-q_{11}$
4	q_{14}	q_{24}	$-Q_{23}$	$-q_{22}$	$-q_{12}$
3	q_{13}	q_{23}	0	$-q_{23}$	$-q_{13}$
2	q_{12}	q_{22}	Q_{23}	$-q_{24}$	$-q_{14}$
1	q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	$-q_{15}$

Tafel III. *Symmetrie der scheinbaren Lasten Q_{ik}.*
(Die Zusatzverschiebungen v_{ik} und die Spannungszahlen $(s_y)_{ik}$ sind in der gleichen Weise symmetrisch.)

$k=$ \ $i=$	1	2	3	4	5
5	$-q_{15}$	$-q_{14}$	$-q_{13}$	$-q_{12}$	$-q_{11}$
4	Q_{14}	$-q_{24}$	$-q_{23}$	$-q_{22}$	$-Q_{12}$
3	Q_{13}	Q_{23}	0	$-Q_{23}$	$-Q_{13}$
2	Q_{12}	q_{22}	q_{23}	q_{24}	$-Q_{14}$
1	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}

Tafel IV. *Einflußzahlen zur Berechnung der relativen Zusatzverschiebungen u'_{ik} und v'_{ik} aus den fiktiven Lasten q_{ik} und Q_{ik}.*

	$\times q_{11}$	$\times q_{12}$	$\times q_{13}$	$\times q_{14}$	$\times q_{15}$	$\times q_{22}$	$\times q_{23}$	$\times q_{24}$	$\times Q_{12}$	$\times Q_{13}$	$\times Q_{14}$	$\times Q_{23}$
$100\,u'_{11}=$	−15,888	− 3,420	− 0,489	+ 0,482	+ 0,658	− 3,868	− 0,811	+ 0,946	− 7,250	− 3,228	− 1,435	− 2,180
$100\,u'_{12}=$	− 3,420	−15,458	− 2,004	+ 0,738	+ 0,482	− 7,936	− 1,447	+ 1,882	− 2,646	− 1,189	− 0,726	− 4,305
$100\,u'_{13}=$	− 0,489	− 2,004	− 14,858	− 2,004	− 0,489	− 0,563	− 5,138	− 0,563	− 0,541	0	+ 0,541	0
$100\,u'_{14}=$	+ 0,482	+ 0,738	− 2,004	−15,458	− 3,420	+ 1,882	− 1,447	− 7,936	+ 0,726	+ 1,189	+ 2,646	+ 4,305
$100\,u'_{15}=$	+ 0,658	+ 0,482	− 0,489	− 3,420	−15,888	+ 0,946	− 0,811	− 3,868	+ 1,435	+ 3,228	+ 7,250	+ 2,180
$100\,u'_{22}=$	− 3,868	− 7,936	− 0,563	+ 1,882	+ 0,946	−19,588	− 2,118	+ 3,783	− 4,406	− 1,732	− 1,266	− 8,528
$100\,u'_{23}=$	− 0,811	− 1,447	− 5,138	− 1,447	− 0,811	− 2,118	−13,442	− 2,118	− 1,326	0	+ 1,326	0
$100\,u'_{24}=$	+ 0,946	+ 1,882	− 0,563	− 7,936	− 3,868	+ 3,783	− 2,118	−19,588	+ 1,266	− 1,732	+ 4,406	+ 8,528
$100\,v'_{12}=$	− 7,250	− 2,646	− 0,541	+ 0,726	− 1,435	− 4,406	− 1,326	+ 1,266	−17,717	− 7,924	− 3,374	− 2,958
$100\,v'_{13}=$	− 3,228	− 1,189	0	+ 1,189	+ 3,228	− 1,732	0	+ 1,732	− 7,924	−18,646	− 7,924	− 3,359
$100\,v'_{14}=$	− 1,435	− 0,726	+ 0,541	+ 2,646	+ 7,250	− 1,266	+ 1,326	+ 4,406	− 3,374	− 7,924	−17,717	− 2,958
$100\,v'_{23}=$	− 2,180	− 4,305	0	+ 4,305	+ 2,180	− 8,528	0	+ 8,528	− 2,958	− 3,359	− 2,958	−17,648

Tafel V. *Koeffizienten für die 9 homogenen Gleichungen zur Berechnung der verbesserten Ausbeulordinaten.*

Punkt i	Punkt k	$\times w_{11}$	$\times w_{12}$	$\times w_{13}$	$\times w_{14}$	$\times w_{15}$	$\times w_{22}$	$\times w_{23}$	$\times w_{24}$	$\times w_{33}$
1	1	$+22+2\varphi_x+2\varphi_y$	$-16-\varphi_x-\varphi_y$	$+2$	0	0	$+2-\varphi$	0	0	0
1	2	$-8-\varphi_y$	$+23+2\varphi_x+2\varphi_y-\varphi$	$-8-\varphi_y$	$+1$	0	$-8-\varphi_x$	$+3-\varphi$	0	0
1	3	$+1$	$-8-\varphi_y$	$+21+2\varphi_x+2\varphi_y$	$-8-\varphi_y$	$+1$	$+2+\varphi$	$-8-\varphi_x$	$+2-\varphi$	$+1$
1	4	0	$+1$	$-8-\varphi_y$	$+23+2\varphi_x+2\varphi_y-\varphi$	$-8-\varphi_y$	0	$+3+\varphi$	$-8-\varphi_x$	0
1	5	0	0	$+2$	$-16-\varphi_x-\varphi_y$	$+22+2\varphi_x+2\varphi_y$	0	0	$+2+\varphi$	0
2	2	$+2-\varphi$	$-16-\varphi_x-\varphi_y$	$+4+2\varphi$	0	0	$+20+2\varphi_x+2\varphi_y$	$-16-\varphi_x-\varphi_y$	$+2$	$+2-\varphi$
2	3	0	$+3-\varphi$	$-8-\varphi_x$	$+3+\varphi$	0	$-8-\varphi_y$	$+25+2\varphi_x+2\varphi_y$	$-8-\varphi_y$	$-8-\varphi_x$
2	4	0	0	$+4-2\varphi$	$-16-\varphi_x-\varphi_y$	$+2+\varphi$	$+2$	$-16-\varphi_x-\varphi_y$	$+20+2\varphi_x+2\varphi_y$	$+2+\varphi$
3	3	0	0	$+4$	0	0	$+4-2\varphi$	$-32-2\varphi_x-2\varphi_y$	$+4+2\varphi$	$+20+2\varphi_x+2\varphi_y$

Anmerkung: Es sind in jeder Zeile diejenigen $(\varphi_x)_{ik}$, $(\varphi_y)_{ik}$ und φ_{ik} einzusetzen. die zu dem zur Zeile gehörigen $(i; k)$ gehören. In der Tafel sind die Indizes $i; k$ bei den φ weggelassen.

beulamplitude und der Änderung des Eckenwinkels bei der angenommenen Ausbeulform durch Nullsetzen der Determinante für die Koeffizienten der w_{ik}. Man muß hierzu einen der Parameter — wir nehmen (w_{33}/h) — festhalten und die Determinante für verschiedene Werte des anderen berechnen, bis man die Nullstelle der Determinante interpolieren kann. Für das so gefundene Wertepaar ψ und (w_{33}/h) liefern dann die Gleichungen nach Tafel V neue relative Ausbeulordinaten ω_{ik}. Diese bestimmen eine verbesserte Ausbeulform, die sich im allgemeinen von der zuerst angenommenen unterscheiden wird. Sie kann durch Wiederholung des Verfahrens — Berechnung der Zusatzverschiebungen und der Zusatzspannungen aus der Ausbeulform und Bestimmung einer verbesserten Ausbeulform aus der Determinante Tafel V — solange verbessert werden, bis sie und die aus ihr folgenden Spannungen genügend genau festliegen.

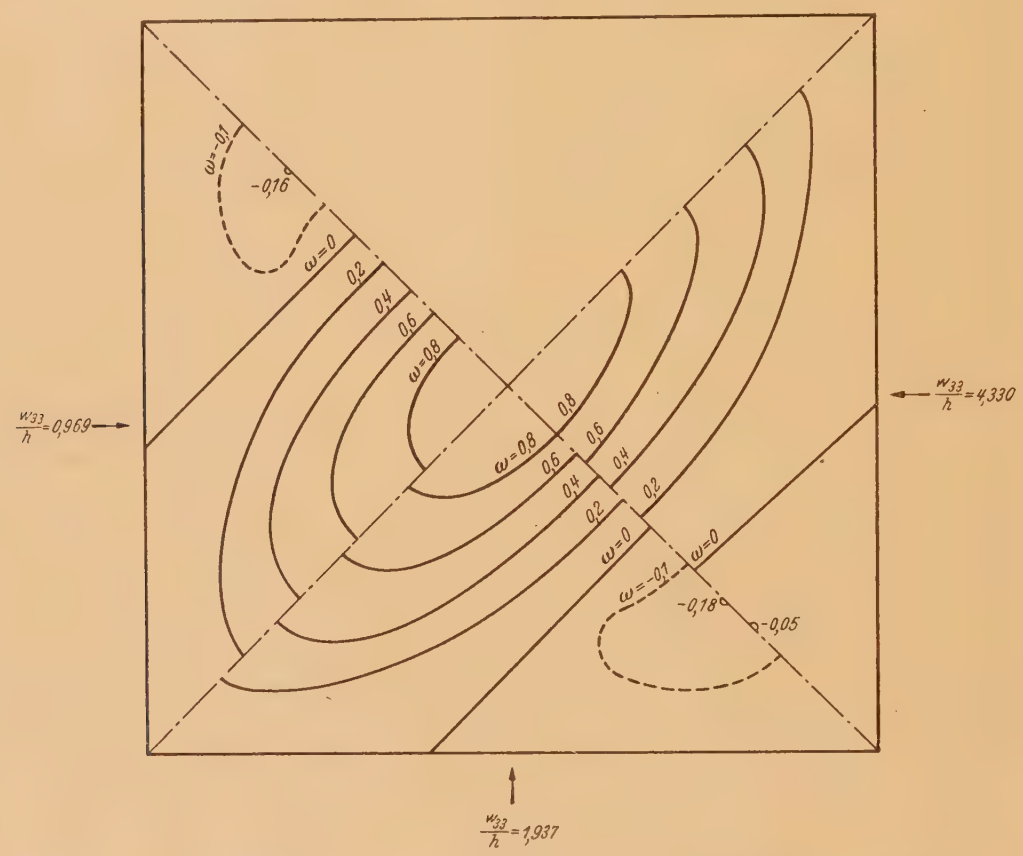


Abb. 2. Beulformen, dargestellt durch Höhenlinien, für drei relative Ausbeulamplituden.

Bei der numerischen Durchrechnung wählte der Verfasser als ersten Ansatz die von *Moheit*[1] für die Unterteilung $n=6$ bestimmte Ausbeulform an der Knickgrenze, deren relative Ordinaten in Tafel VI unter „Schritt 1" angegeben sind. Die Tafel enthält ferner die weiteren Schritte auf dem oben beschriebenen Weg, der zuerst für eine willkürlich angenommene relative Ausbeulamplitude $(w_{33}/h)=0{,}969$ durchgerechnet wurde. Bei den dafür berechneten, unter „Schritt 4" angegebenen Spannungszahlen verschwindet die Determinante Tafel V für den Eigenwert $\psi_I=2{,}7922$, zu dem die unter „Schritt 5" angegebenen verbesserten Ausbeulordinaten $(\omega_{ik})_I$ gehören. Diese wurden noch einmal in den Schritten 6 bis 9 verbessert, die den Schritten 2 bis 5 entsprechen. Dabei änderte sich der Eigenwert auf $\psi_{II}=2{,}8166$. Dieser Wert ist nach Gl. (36) der Gleitung proportional und das 1,280-fache des von *Moheit* für die Stabilitätsgrenze bei der Unterteilung $n=6$ berechneten Wertes $\psi_K=2{,}2008$. Es wurde darauf verzichtet, diesen Wert noch weiter zu verbessern.

[1] *W. Moheit*, Stahlbau 13 (1940) S. 39.

Tafel VI. *Berechnung der Beulform für* $(w_{33}/h) = 0{,}969$.

Schritt	Wert	Stammt woher? $ik =$	11	12	13	14	15	22	23	24	33
1	$(\omega_{ik})_0$	Ausbeulform an der Stabil.-Grenze n. *Moheit*	+0,253	+0,359	+0,165	−0,086	−0,122	+0,761	+0,697	+0,232	+1,000
2	$(q_{ik})_0$ $(Q_{ik})_0$	Gleichung (23) und (24) mit $(\omega_{ik})_0$	+0,0373 —	+0,0725 −0,1020	−0,4229 +0,1358	−0,2217 +0,1959	+0,0322 —	+0,2370 —	+0,5128 −0,4719	−0,3375 —	0 0
3	$(10^3 u'_{ik})_0$ $(10^3 v'_{ik})_0$	Tafel IV mit $(q_{ik})_0$ und $(Q_{ik})_0$	−13,224 —	−18,093 −10,332	+41,316 −30,525	+51,926 −46,018	+23,102 —	−38,825 —	−39,526 +14,174	+54,110 —	0 0
4	$[(\varphi_x)_{ik}]_0$ $[(\varphi_y)_{ik}]_0$ $(\varphi_{ik})_0$	Gleichung (26) bis (28), (32) bis (34) u. (36) mit $(\omega_{ik})_0$, $(u'_{ik})_0$, $(v'_{ik})_0$	+0,1641 +0,1641 ψ +0,0265	+0,5670 +0,1121 ψ −0,0167	+0,5060 +0,2314 ψ −0,0665	+0,4325 +0,2842 ψ −0,0990	+0,3590 +0,3590 ψ −0,1008	+0,4560 +0,4560 ψ −0,0012	+0,8510 +0,5570 ψ −0,0913	+0,6538 +0,6538 ψ −0,1270	+0,5930 +0,5930 ψ −0,0532
5	$(\omega_{ik})_I$	verbesserte Form n. Tafel V mit $\psi_I = 2{,}7922$	+0,2880	+0,3776	+0,1442	−0,1183	−0,1359	+0,7909	+0,6877	+0,1961	+1,0000
6	$(q_{ik})_I$ $(Q_{ik})_I$	Gleichung (23) und (24) mit $(\omega_{ik})_I$	+0,0751 —	+0,0964 −0,1284	−0,4755 +0,1795	−0,2077 +0,2030	+0,0421 —	+0,2429 —	+0,5366 −0,5213	−0,4017 —	0 0
7	$(10^3 u'_{ik})_I$ $(10^3 v'_{ik})_I$	Tafel IV mit $(q_{ik})_I$ und $(Q_{ik})_I$	−19,217 —	−21,793 −12,141	+47,423 −37,726	+54,082 −50,886	+24,485 —	−41,092 —	−39,277 +14,985	+62,534 —	0 0
8	$[(\varphi_x)_{ik}]_I$ $[(\varphi_y)_{ik}]_I$ $(\varphi_{ik})_I$	Gleichung (26) bis (28), (32) bis (34) u. (36) mit $(\omega_{ik})_I$, $(u'_{ik})_I$, $(v'_{ik})_I$	+0,1763 +0,1763 ψ +0,0260	+0,6235 +0,1411 ψ +0,0293	+0,4867 +0,2758 ψ −0,0746	+0,4674 +0,3201 ψ −0,1059	+0,4079 +0,4079 ψ −0,1080	+0,4561 +0,4561 ψ −0,0058	+0,8887 +0,6313 ψ −0,1061	+0,6998 +0,6998 ψ −0,1354	+0,5892 +0,5892 ψ −0,0562
9	$(\omega_{ik})_{II}$	endgültige Form n. Tafel V mit $\psi_{II} = 2{,}8166$	+0,2895	+0,3795	+0,1426	−0,1183	−0,1295	+0,7923	+0,6863	+0,1949	+1,0000

Tafel VII. *Endgültige relative Verschiebungen* $(u'_{ik}; v'_{ik})$, *Spannungszahlen* $[(\varphi_x)_{ik}; (\varphi_y)_{ik}$ *und* $\varphi_{ik}]$ *und rel. Ausbeulordinaten* ω_{ik} *für* $(w_{33}/h) = 1{,}937$ *bei* $\psi = 4{,}484$.

$ik =$	11	12	13	14	15	22	23	24	33
$1000\, u'_{ik} =$ $1000\, v'_{ik} =$	−35,763 −35,763	−29,606 −17,309	+58,389 −55,009	+55,495 −56,710	+27,714 −27,714	−45,978 −45,978	−32,379 +7,439	+74,264 −74,264	0 0
$(\varphi_x)_{ik} =$ $(\varphi_y)_{ik} =$ $\varphi_{ik} =$	+0,7621 +0,7621 +4,582	+2,9755 +0,9528 +4,248	+1,9798 +1,4195 +4,146	+2,1121 +1,5383 +4,022	+1,8546 +1,8546 +4,030	+1,5544 +1,5544 +4,482	+3,8717 +3,1388 +3,977	+2,9047 +2,9047 +3,954	+1,9427 +1,9427 +4,367
$\omega_{ik} =$	+0,3669	+0,4125	+0,1086	−0,1418	−0,1336	+0,8439	+0,6574	+0,1525	+1,0000

Tafel VIII. *Endgültige relative Verschiebungen* $(u'_{ik}; v'_{ik})$, *Spannungszahlen* $[(\varphi_x)_{ik}; (\varphi_y)_{ik}; \varphi_{ik}]$ *und rel. Ausbeulordinaten* ω_{ik} *für* $(w_{33}/h) = 4{,}330$ *bei* $\psi = 7{,}512$.

$ik =$	11	12	13	14	15	22	23	24	33
$1000\, u'_{ik} =$ $1000\, v'_{ik} =$	−42,36 −42,36	−30,37 −20,98	+33,44 −36,58	+42,72 −40,37	+23,94 −23,94	−46,54 −46,54	−8,83 −12,63	+52,94 −52,94	0 0
$(\varphi_x)_{ik} =$ $(\varphi_y)_{ik} =$ $\varphi_{ik} =$	+2,783 +2,783 +7,856	+12,918 +5,872 +6,588	+10,522 +5,432 +6,363	+8,666 +5,552 +5,794	+6,057 +6,057 +5,910	+4,506 +4,506 +8,429	+17,258 +12,500 +5,931	+9,665 +9,665 +5,812	+2,650 +2,650 +8,459
$\omega_{ik} =$	+0,3851	+0,3960	+0,1889	+0,0035	−0,0481	+0,7851	+0,6187	+0,2458	+1,0000

Mehrfach iteriert wurden erst die weiteren Werte, die auf die gleiche Weise für die relativen Ausbeulamplituden $(w_{33}/h) = 1{,}937$ und $(w_{33}/h) = 4{,}330$ bestimmt wurden. Für die beim jeweils letzten Schritt gefundene Beulform sind in den Tafeln VII und VIII die relativen Verschiebungen in der Plattenebene, die nach Tafel IV berechnet wurden, die Spannungszahlen nach den Gleichungen (32) bis (34) und die relativen Ausbeulordinaten sowie der zugehörige Eigenwert ψ angegeben. Die beste für jede relative Ausbeulamplitude ermittelte Beulform ist in Abb. 2 durch Höhenlinien $\omega = \text{konst.}$ dargestellt.

4. Biegespannungen und äußere Schubkraft. Durch die in den Tafeln VI, VII und VIII aufgeführten Spannungszahlen ist der Spannungszustand in der Blechmittelebene bestimmt. Diesen Spannungen überlagern sich außerhalb der Mittelebene die Biegungsspannungen $\bar{\sigma}$. Ihren größten Wert an der Blechoberfläche erhält man nach *Kromm* und *Marguerre* [a. a. O. S. 635] aus

$$\bar{\sigma}_{\max} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{h}{4}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,(+)\sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2}\right]. \tag{37}$$

Führen wir analog dem früheren Vorgehen auch für diese Spannung eine „Biegespannungszahl"

$$\bar{\varphi}_{ik} = 12\,(1-\nu^2)\,\frac{|\bar{\sigma}_{ik}|}{E}\,\frac{d^2}{h^2} \tag{38}$$

ein, so wird diese im Mittelpunkt des Quadrats, wo die Krümmung des Blechs am stärksten ist,

$$\bar{\varphi}_{33} = 3\,\frac{w_{33}}{h}\,[4\,(1-\omega_{23}) + \omega_{22} - \omega_{24}]. \tag{39}$$

Da die Dehnungsspannungen des Bleches ihren größten Wert jedoch im Punkt (23) annehmen, werde auch für diesen die Biegespannungszahl

$$\bar{\varphi}_{23} = 3\,\frac{w_{33}}{h}\left[1 + \omega_{24} - 4\,\omega_{23} + \omega_{22} + \omega_{13}\,\underline{(+)}\sqrt{(1-\omega_{24}-\omega_{22}+\omega_{13})^2 + \frac{1}{4}\,(\omega_{14}-\omega_{12})^2}\right] \tag{40}$$

berechnet. Beide Spannungszahlen sind in der Tafel IX für die drei oben untersuchten relativen Ausbeulamplituden angegeben. Danach müssen die Biegespannungen wegen ihrer Größe neben den Dehnungsspannungen bei der Beurteilung der Beanspruchung des Bleches berücksichtigt werden.

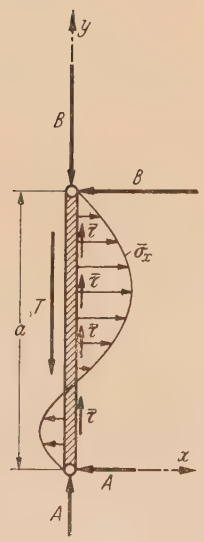


Abb. 3. Kräfte am linken Vertikalträger.

Tafel IX. *Biegespannungszahlen* $\bar{\varphi}_{ik}$.

$w_{33}/h =$	0,969	1,937	4,330
$\bar{\varphi}_{33} =$	5,384	11,981	26,818
$\bar{\varphi}_{23} =$	2,642	4,786	6,586

Um die äußere Schubkraft und die Beanspruchungen der Stäbe zu erhalten, betrachten wir die an einem, z. B. dem linken Vertikalstab angreifenden Kräfte (Abb. 3). Die äußere Schubkraft T muß im Gleichgewicht sein mit der vom Blech her übertragenen Schubkraft und der Differenz der axialen Kräfte A und B,

$$T = A - B + \int_0^a \bar{\tau}\,h\,dy. \tag{41}$$

Aus Symmetriegründen müssen die axialen Kräfte A und B gleich groß sein wie die Stützkräfte senkrecht zur Stabachse, denn diese sind die Axialkräfte für Ober- und Untergurt. Die Stützkräfte erhält man aus den beiden Bedingungen

$$A + B = \int_0^a \bar{\sigma}_x\,h\,dy \tag{42}$$

und

$$B\,a = \int_0^a \bar{\sigma}_x\,h\,y\,dy. \tag{43}$$

Eliminiert man mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen die axialen Kräfte aus (41), so erhält man für die äußere Schubkraft

$$T = \int_0^a \bar{\tau}\, h\, dy + \int_0^a \bar{\sigma}_x\, h\, dy - 2\,\frac{h}{a} \int_0^a \bar{\sigma}_x\, y\, dy\,. \tag{44}$$

Wir ersetzen hierin die Integrale durch Summen, drücken die Spannungen mit Hilfe der Gleichungen (26) bis (28) durch die Verschiebungen aus, wobei wir wieder berücksichtigen, daß die Ableitungen $\partial w/\partial x$ und $\partial w/\partial y$ am Rand verschwinden, beziehen die Schubkraft T auf ihren Wert an der Knickgrenze T_K und erhalten so

$$\frac{T}{T_K} = \frac{\psi}{\psi_K} + \frac{1}{\psi_K}\left(\frac{w_{33}}{h}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{5} v'_{1k} + \sum_{k=1}^{5} u'_{1k} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{5} k\, u'_{1k}\right). \tag{45}$$

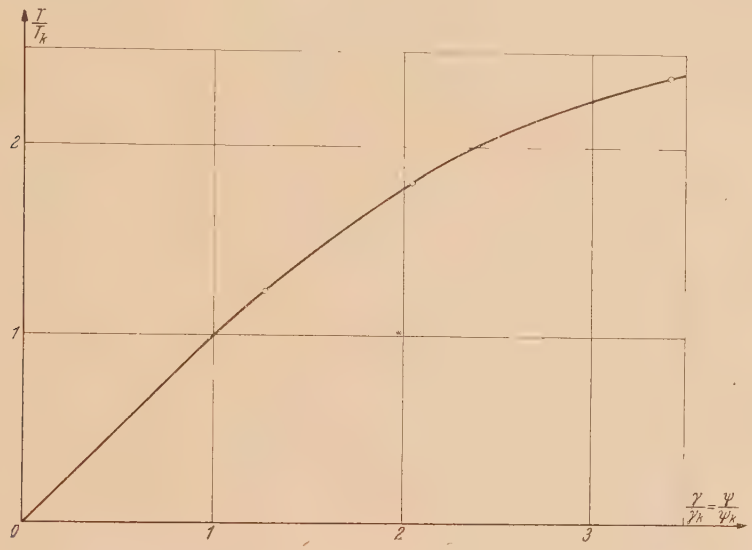


Abb. 4. Relative Schubkraft T/T_K als Funktion des relativen Gleitwinkels γ/γ_K.

5. Diskussion des Ergebnisses. Die hieraus mit den drei errechneten Punkten folgende Abhängigkeit der relativen Schubkraft von der relativen Änderung des Eckenwinkels ist in Abb. 4 aufgezeichnet. In Abb. 5 ist der daraus folgende wirksame relative Schubmodul mit dem für den unendlich langen Streifen bei gelenkiger Lagerung und steifen Querstützen von

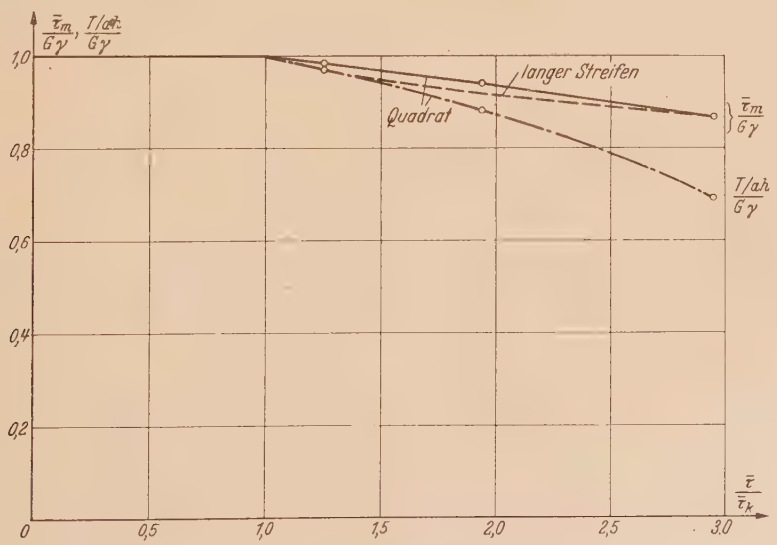


Abb. 5. Wirksamer relativer Schubmodul als Funktion der relativen Schubspannung für die quadratische Platte, verglichen mit den Werten für den gelenkig gelagerten, langen Streifen.

Kromm und *Marguerre* berechneten verglichen. Das Quadrat ist danach etwas steifer als der Streifen, jedoch ist der Unterschied nur gering, wenn man wie beim Streifen von der mittleren Schubspannung im Blech $\overline{\tau}_m$ ausgeht. Der Streifen liefert dann selbst für das Quadrat eine noch brauchbare Näherung. Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man die Steifigkeit für die ganze Konstruktion — Blech mit starrem, jedoch nicht eckensteifem Rahmen — untersucht, für welche die aus der äußeren Kraft T folgende mittlere Schubspannung T/ah maßgebend ist. Diese ist wegen der Differenz zwischen den Längskräften A und B kleiner als $\overline{\tau}_m$, wie aus der Gleichung (41) in Verbindung mit der in Abb. 3 skizzierten Verteilung der Normalspannungen $\overline{\sigma}_x$ folgt. Rechnet man dagegen, wie dies beim Streifen getan wurde, nur mit den über die Länge des Trägers konstanten Mittelwerten der Spannungen, so erhält man jenen Unterschied nicht. Mit wachsender Länge des Bleches verliert er an Bedeutung.

Eine gewisse Unsicherheit, die den mitgeteilten Werten durch die Art ihrer Bestimmung aus Differenzengleichungen anhaftet und deren Größenordnung man dadurch bestimmen könnte, daß man die Berechnung noch für eine andere Netzteilung $n \neq 6$ wiederholen würde, dürfte damit gering gehalten sein, daß die Werte auf die mit der gleichen Netzteilung von *Moheit* berechneten Knickwerte bezogen wurden.

Will man außerdem noch die Verformung der Randträger berücksichtigen, die im vorliegenden Fall als vollkommen dehnungs- und biegesteif angenommen wurden, so gehen die Fläche dieser Träger und ihre Biegesteifigkeit als weitere Größen in die Rechnung ein. Die Zusatzverschiebungen verschwinden dann am Rand nicht mehr. Man kann sie voraussichtlich auf zwei Wegen erhalten: Nachdem man wie bisher aus der angenommenen Ausbeulform die Verschiebungen in der Plattenebene näherungsweise bestimmt hat, berechnet man aus ihnen die Randspannungen, aus denen wiederum die Zusatzverschiebungen am Rande folgen. Damit müssen die zuerst gefundenen Zusatzverschiebungen verbessert werden, bevor man die Zusatzspannungen zur Verbesserung der Ausbeulordinaten berechnet. Oder man geht so vor, daß man in dem Schema, das die Einflußzahlen zur Berechnung der Verschiebungen in der Plattenebene gibt, die unbekannten Randverschiebungen stehen läßt. Die Spannungs-Dehnungsgleichungen und die Gleichung der Biegelinie für den Träger gestatten dann die Randverschiebungen zu eliminieren. Wenn der Rechenaufwand für den zweiten angedeuteten Weg bewältigt werden kann, ist er dem zuerst angegebenen schrittweisen Vorgehen vorzuziehen.

(Eingegangen am 4. Februar 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. habil. *Theo-Ernst Schunck*, (14a) Fellbach bei Stuttgart, Schulstraße 33.

Zur Statik des Luftreifens.

Von J. Rotta.

1. Einleitung. Die Vorgänge am Luftreifen eines rollenden Rades sind von großer Bedeutung für die Lebensdauer der Bereifung und die Fahreigenschaften und -leistungen eines Fahrzeuges. Namentlich im Laufe der letzten 15 Jahre wurden von verschiedenen Stellen experimentelle Untersuchungen über Kräfte und Verformungen des Reifens sowohl am Fahrzeug als auch am Versuchsstand durchgeführt, die viele Erkenntnisse zu Tage förderten. Es genügt jedoch nicht allein, Messungen vorzunehmen, sondern eine theoretische Durchdringung der Probleme ist ebenfalls notwendig; denn nur so können die erhaltenen Meßergebnisse richtig gedeutet und auf ähnliche Verhältnisse übertragen werden.

Die theoretische Reifenmechanik ist von ihrem Ziel, der rechnerischen Beherrschung der experimentell beobachteten Vorgänge, noch ziemlich weit entfernt. Zunächst erscheint es wichtig, die Statik des Luftreifens weiter zu entwickeln, um am stehenden oder mit mäßiger Geschwindigkeit rollenden Reifen den Zusammenhang zwischen dem Spannungszustand und den Kräften einerseits und den Verformungen andererseits rechnerisch bestimmen zu können. Es zeigt sich, daß man schon mit verhältnismäßig einfachen Rechnungen viele praktisch wichtige Erscheinungen aufklären kann. Die Ergebnisse der vorliegenden Mitteilung lassen eine Reihe von Schlüssen zu, die qualitativ und zum Teil auch quantitativ gut mit Versuchsbeobachtungen übereinstimmen.

2. Untersuchungen am Reifenelement. Unter einem Reifenelement[1] wollen wir ein aus dem Reifen herausgeschnittenes Teil von der Länge dy verstehen (Abb. 1). Dieses Reifenelement dürfen wir für unsere Betrachtungen wohl näherungsweise als gerades Zylinderstück ansehen, während es in Wirklichkeit einen Teil eines Rotationskörpers darstellt. Diese Vereinfachung bringt ganz wesentliche Erleichterungen für die Rechnung mit sich, so daß sie aus diesem Grunde allein gerechtfertigt erscheint. Andererseits liegt der Wert der Untersuchungen hauptsächlich in qualitativen Ergebnissen, und für diesen Zweck ist die genannte Vereinfachung durchaus statthaft.

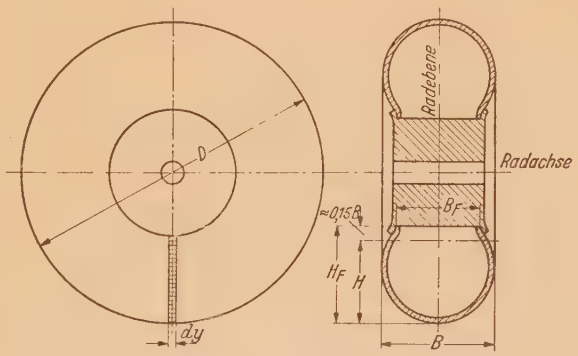


Abb. 1. Hauptabmessungen des Reifens und Definitionen.

Das Wesentliche bei dem so vereinfachten Reifenelement ist die Tatsache, daß die Längsspannungen in Umfangsrichtung sowie die entsprechenden Biegemomente und Querkräfte aus dem Rechnungsgang abgespalten werden können und nur Spannungen in der Meridianrichtung (x-Richtung) ermittelt zu werden brauchen. Im Fall verschwindender Biegesteifigkeit der Reifenwand, den wir hier ausschließlich untersuchen wollen, nehmen die beiden Gleichungen für das Membrangleichgewicht (senkrecht zur Schalenebene und in der Meridianrichtung) der Schalen folgende Formen an:

$$\frac{N_x}{r} = p\,, \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}\,. \tag{1}$$

Dabei ist N_x die Zugkraft in Meridianrichtung, N_{yx} die Schubkraft. Die Schnittkräfte N_x und N_{yx} werden auf die Einheit der Schnittkantenlänge bezogen. Ferner ist r der Krümmungshalbmesser im Meridianschnitt, p der Innendruck des Reifens.

[1] Der Begriff „Reifenelement" ist zu unterscheiden von dem „Schalenelement". Mit letzterer Bezeichnung sei ein aus der Reifenwand herausgeschnittenes rechteckiges oder sektorförmiges Teilchen gemeint.

Wir betrachten zunächst den Spannungszustand im Reifenelement, wenn der unter dem Innendruck p stehende Reifen mit dem Boden nicht in Berührung ist. Da der Spannungszustand bezüglich der Radachse rotationssymmetrisch ist, muß die Schubkraft $N_{yx}=0$ sein, also auch $\partial N_x/\partial x=-\partial N_{yx}/\partial y=0$. Die Zugkraft N_x ist also konstant; damit ergibt sich aus (1) auch $r=$ konst. Somit stellt die Reifenwand im unverformten Zustand den Teil einer Kreiszylinderschale dar (Abb. 2), mit dem Halbmesser[1] $r^*=B/2$. Zwischen dem Breitenverhältnis des Felgenbettes B_F/B, der Höhe H über dem Felgenbett und der Breite B besteht folgender Zusammenhang:

$$H=\frac{B}{2}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{B_F}{B}\right)^2}\right]. \tag{2}$$

Die Normalschnittkraft beträgt im unverformten Zustand nach (1)

$$N_x^*=p\,\frac{B}{2}. \tag{3}$$

Bei Abplattung dieses Reifenelementes auf ebener, unnachgiebiger Unterlage findet ein einfaches Abwickeln der Reifenwand statt, ohne daß etwa bestimmte Verzerrungen der einzelnen Schalenelemente geometrisch bedingt wären. Dieser Umstand ermöglicht die Untersuchung des Falles mit nicht dehnbarer Reifenwand. In diesem Falle darf die Länge der Abwicklung des Reifenelements

$$u=B\left(\pi-\arcsin\frac{B_F}{B}\right) \tag{4}$$

bei der Verformung ihre Größe nicht ändern.

Im Gebiet der Bodendruckfläche gilt für das Kräftegleichgewicht senkrecht zur Schalenebene

$$\frac{N_x}{r}=p-\tilde{p}, \tag{5}$$

wenn $\tilde{p}$ den Druck bezeichnet, den die Reifenschale gegen den Boden ausübt. Wir wollen nun annehmen, der Boden sei eben und unnachgiebig, und die Reifenschale sei so dünn, daß die Verformungen senkrecht zu ihrer Ebene vernachlässigbar klein seien. Dann wird wegen $r=\infty$

$$\tilde{p}=p. \tag{6}$$

Der Druck zwischen Reifen und Boden ist also gleich dem Innendruck p. Dies ist allerdings die einzige Aussage, die unter den hier getroffenen Vereinfachungen über die Spannungsverteilung im Gebiet der Bodendruckfläche gemacht werden kann. Wir werden uns daher damit begnügen, die Gesamtkraftkomponenten auszurechnen, die vom Boden auf das Reifenelement übertragen werden.

3. Symmetrische Abplattung des Reifenelementes. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen (1) für die freien Teile der Reifenwand bleiben bei der Abplattung unverändert. Da wir das untersuchte Reifenelement an der Stelle senkrecht unter der Radachse herausgeschnitten haben, an der aus Symmetriegründen wieder die Schubkraft $N_{yx}=0$ ist, so haben die freien Reifenteile auch beim abgeplatteten Reifenelement konstante Krümmung. Die Ermittlung der Gestalt des Reifenelementes nach der Abplattung ist damit bei Vernachlässigung der Biegesteifigkeit und Dehnbarkeit der Wand eine rein geometrische Aufgabe.

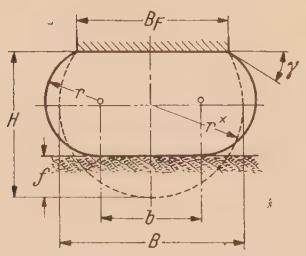


Abb. 2. Symmetrische Abplattung des idealisierten Reifenelementes.

Am abgeplatteten Element (Abb. 2) gilt für die Einfederung f die Beziehung

$$f+r(1+\cos\gamma)=H \tag{7}$$

und für die Breite b der Bodendruckfläche

$$b+2\,r\sin\gamma=B_F. \tag{8}$$

Ferner sollte sich die Länge der Abwicklung unter dem Einfluß der Abplattung nicht ändern:

$$u=b+2\,r(\pi-\gamma)=B\left[\pi-\arcsin\frac{B_F}{B}\right]. \tag{9}$$

[1] Hochgestellter Stern als Index weist auf den unverformten Vorspannungszustand des Reifenelementes hin.

Nach Einführung der Verhältniszahlen $B_F/B = \psi$, $f/B = \lambda$, $2r/B = \varrho$ ergibt sich aus (9) und (8)

$$\varrho = \frac{\pi - \arcsin\psi - \psi}{\pi - \gamma - \sin\gamma}. \tag{10}$$

Mit diesem Wert folgt dann weiter aus (7)

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1-\psi^2} - \frac{\pi - \arcsin\psi - \psi}{\pi - \gamma - \sin\gamma}(1+\cos\gamma)\right] \tag{11}$$

und schließlich aus (8)

$$\frac{b}{B} = \frac{\psi(\pi-\gamma) - \sin\gamma(\pi - \arcsin\psi)}{\pi - \gamma - \sin\gamma}. \tag{12}$$

Der Zusammenhang zwischen (11) und (12) wird durch den Winkel γ zwischen der Tangente an die Reifenwand am Reifenfuß und der Felgenbettebene vermittelt. Durch Einsetzen verschiedener Werte für γ in (11) und (12) kann die Breite b der Bodendruckfläche in Abhängigkeit von der Einfederung f berechnet werden. Abb. 3 gibt das Verhältnis b/B als Funktion von λ mit dem Parameter H/B wieder. Da die Größe der aufgenommenen Kraft wegen (6) proportional zu b ist, kann der Verlauf von b/B über λ als Kennzeichen für die Federeigenschaften des Reifens angesehen werden. Die Federsteifigkeit nimmt also zu, wenn H/B kleiner wird.

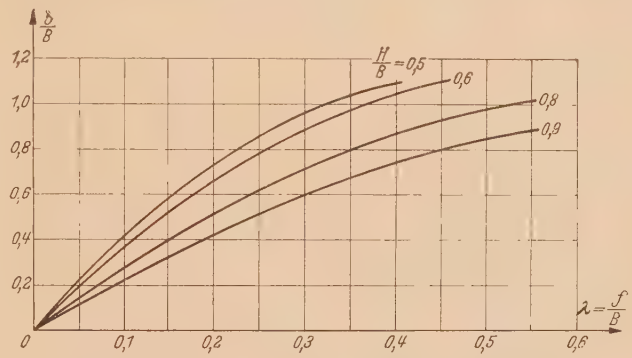


Abb. 3. Breite der Bodendruckfläche des abgeplatteten Reifenelementes.

Es mag noch erwähnt werden, daß es bei kreisförmigem Reifenquerschnitt gleichgültig ist, ob man die Größe H/B oder B_F/B als kennzeichnenden Parameter benutzt, da die beiden Größen durch (2) in fester Beziehung zueinander stehen. Es hat sich jedoch gezeigt, daß beim Vergleich mit Reifenquerschnitten, die von der genauen Kreisform abweichen, der Wert H/B für die Beurteilung der Eigenschaften besser geeignet ist als B_F/B. Darum ist in Abb. 3 und ebenso bei den weiteren Rechnungen H/B und nicht B_F/B als Kenngröße verwendet.

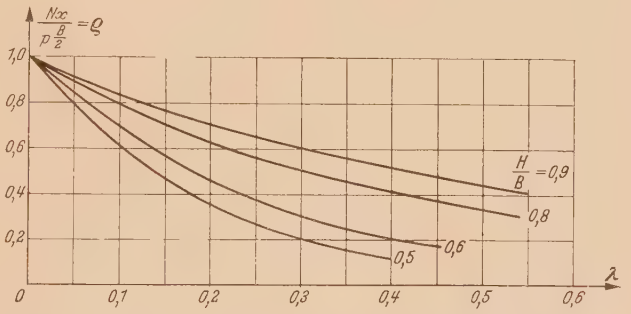


Abb. 4. Längskraft in Meridianrichtung als Funktion der Abplattung.

Ein anderes wichtiges Ergebnis dieser Untersuchung, das man auch ohne Rechnung aus Abb. 2 herauslesen kann, ist die Abnahme des Krümmungshalbmessers r mit zunehmender Abplattung. Nach (1) muß bei gleichbleibendem Innendruck p damit auch die Spannung N_x in Meridianrichtung bei anwachsender Abplattung abnehmen. Abb. 4 gibt das Verhältnis der herrschenden Spannung N_x zu der des unverformten Zustandes N_x^* als Funktion von λ an:

$$\frac{N_x}{p\,B/2} = \frac{N_x}{N_x^*} = \varrho. \tag{13}$$

Aus der Abnahme von N_x mit fortschreitender Abplattung, die ebenfalls stark von H/B abhängig ist, auf die Dehnungen der Reifenwand zu schließen, wie es bei *Martin*[1] geschieht, ist wegen der besonderen Verzerrungseigenschaften der Reifenwand nicht ohne weiteres zulässig.

4. Seitliche Verformung des abgeplatteten Reifenelementes. Wird nun an dem abgeplatteten Reifenelement die Felge um den Betrag f_s gegenüber dem Boden seitlich verschoben, ohne daß zwischen Reifendecke und Boden irgendwelche Gleitungen auftreten, so findet an der einen

[1] *F. Martin*, Jahrb. 1939 der Deutschen Luftfahrtforschung I, S. 470.

Seite ein Abwickeln der Reifenschale auf den Boden statt, während sie an der anderen Seite aufgewickelt wird. Die Krümmungshalbmesser r und die Winkel γ nehmen rechts und links verschiedene Größe an (Abb. 5). Die geometrischen Beziehungen zur Berechnung des Verformungszustandes haben nun folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} r_1(1+\cos\gamma_1) &= H-f, \\ r_2(1+\cos\gamma_2) &= H-f, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} b_1 + r_1 \sin\gamma_1 &= \frac{1}{2} B_F + f_s, \\ b_2 + r_2 \sin\gamma_2 &= \frac{1}{2} B_F - f_s. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die Abwicklung der Reifenschale bleibt wieder unverändert:

$$\frac{1}{2} u = b_1 + r_1(\pi - \gamma_1) = b_2 + r_2(\pi - \gamma_2) = \frac{1}{2} B(\pi - \arcsin\psi). \tag{16}$$

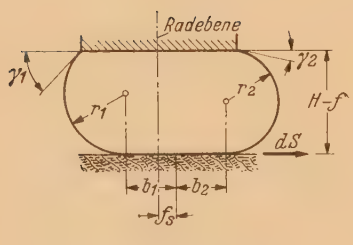


Abb. 5. Seitliche Verschiebung des abgeplatteten Reifenelementes.

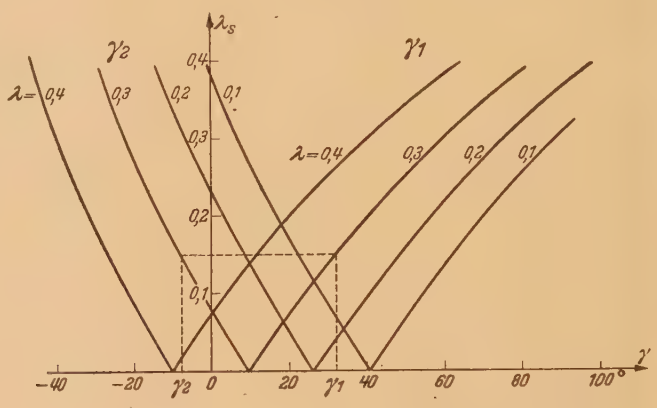


Abb. 6. Verformungszustand bei seitlicher Verschiebung und Abplattung.

Mit den bereits benutzten Verhältniszahlen und $f_s/B = \lambda_s$ folgt aus (15) und (16) nach Elimination von b_1 und b_2

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{\pi - \arcsin\psi - \psi - 2\lambda_s}{\pi - \gamma_1 - \sin\gamma_1}, \\ \varrho_2 &= \frac{\pi - \arcsin\psi - \psi + 2\lambda_s}{\pi - \gamma_2 - \sin\gamma_2}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Setzt man diese Werte in (14) ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+\cos\gamma_1}{\pi - \gamma_1 - \sin\gamma_1} &= \frac{1+\sqrt{1-\psi^2} - 2\lambda}{\pi - \arcsin\psi - \psi - 2\lambda_s}, \\ \frac{1+\cos\gamma_2}{\pi - \gamma_2 - \sin\gamma_2} &= \frac{1+\sqrt{1-\psi^2} - 2\lambda}{\pi - \arcsin\psi - \psi + 2\lambda_s}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die numerische Auswertung dieser gekoppelten Gleichungen ist etwas umständlich. Für ein gegebenes Breitenverhältnis des Felgenbettes ψ setzt man in (18) nacheinander verschiedene Werte für λ und γ_1 bzw. γ_2 ein und berechnet die zugehörigen λ_s. Trägt man dann die seitliche Verschiebung λ_s über γ_1 und γ_2 auf, so bekommt man Kurven mit dem Parameter λ (Abb. 6). Für einen bestimmten λ_s-Wert kann man in diesem Diagramm den Wert γ_1 und das zugehörige γ_2 ablesen. Die weitere Ermittlung der Krümmungshalbmesser nach (17) bereitet dann keine Mühe. Für die Breite der Bodendruckfläche ergibt sich aus (16)

$$\frac{b}{B} = \frac{b_1 + b_2}{B} = \pi - \arcsin\psi - \varrho_1 \frac{\pi - \gamma_1}{2} - \varrho_2 \frac{\pi - \gamma_2}{2}. \tag{19}$$

Nach (1) ist die Zugkraft N_x proportional dem Krümmungshalbmesser r der Schale. Da nun bei seitlicher Verformung die freien Seitenteile der Reifenwand verschieden große Krümmungshalbmesser annehmen, erfordert das statische Gleichgewicht der Kräfte, daß der Boden eine Seitenkraft dS (Abb. 5) auf das Reifenelement dy ausübt:

$$dS = p(r_1 - r_2)\,dy. \tag{20}$$

In Abb. 7 ist diese Seitenkraft für ein Reifenelement mit $H/B = 0{,}8$ über der seitlichen Auslenkung λ_s mit der senkrechten Einfederung als Parameter dargestellt. Die Seitenkraft steigt zunächst etwa geradlinig mit λ_s an und bleibt um so kleiner, je größer die Abplattung des Elements ist.

Der fast geradlinige Anstieg von dS im Bereich kleiner λ_s-Werte und auch der nahezu geradlinige Verlauf der λ-Kurven in der Gegend $\lambda_s = 0$ (Abb. 6) legt es nahe, die Gleichungen (14) bis (16) nach λ_s zu linearisieren, um so eine übersichtlichere Lösung zu bekommen, die für kleine Auslenkungen λ_s hinreichend genau ist. Wir setzen $r_1 - r_2 = 2\Delta r$, $\gamma_1 - \gamma_2 = 2\Delta\gamma$, $r_1 + r_2 = 2\,r$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\,\gamma$, $b_1 - \frac{1}{2}b = \Delta b$, $\frac{1}{2}b - b_2 = \Delta b$ und erhalten aus den Gleichungen (14) bis (16)

$$(1 + \cos\gamma)\,\Delta r - r \sin\gamma\,\Delta\gamma = 0\,, \tag{14a}$$

$$2\,\Delta b + 2 \sin\gamma\,\Delta r + 2\,r \cos\gamma\,\Delta\gamma = 2\,f_s\,, \tag{15a}$$

$$2\,\Delta b + 2(\pi - \gamma)\,\Delta r - 2\,r\,\Delta\gamma = 0\,. \tag{16a}$$

Nach einigen Rechnungen ergibt sich hieraus

$$\Delta r = \frac{f_s \sin\gamma}{2(1 + \cos\gamma) - \sin\gamma\,(\pi - \gamma)}\,. \tag{21}$$

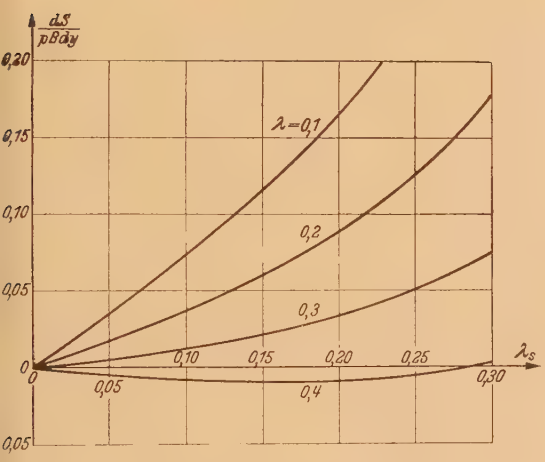


Abb. 7. Seitenkraft infolge seitlicher Verschiebung des Reifenelementes. H/B = 0,8.

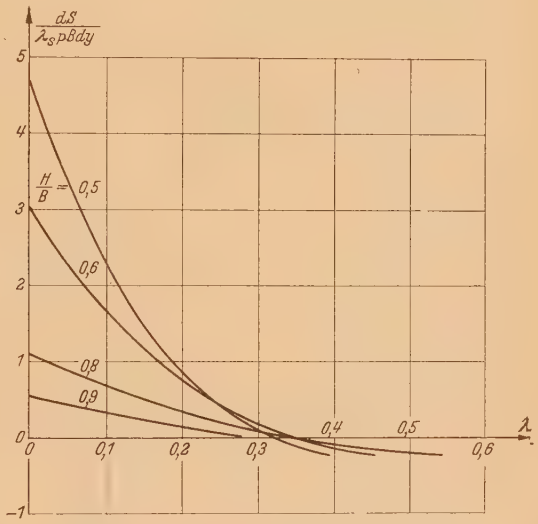


Abb. 8. Seitensteifigkeit des Reifenelementes für $\lambda_s \to 0$

Es folgt somit für die Seitenkraft infolge Seitenverformung bei kleinen λ_s-Werten

$$dS = \lambda_s\,p\,B\,\frac{\sin\gamma}{1 + \cos\gamma - \frac{\pi - \gamma}{2}\sin\gamma}\,dy\,. \tag{22}$$

Hierin ist der Winkel γ nach der durch (11) gegebenen Beziehung der vorhandenen Abplattung λ zuzuordnen.

Abb. 8 zeigt auf diese Weise erhaltene Rechnungsergebnisse. Die Größe $dS/\lambda_s\,p\,B\,dy = dS/f_s\,p\,dy$ stellt die Seitensteifigkeit des Reifenelementes dar. Die Auftragung veranschaulicht deutlich die Abnahme der Seitensteifigkeit mit anwachsender Einfederung. Bei einer bestimmten Größe von λ wird sie sogar negativ; dies ist der Fall, wenn γ negativ wird. In diesem Falle setzt das Reifenelement einer seitlichen Verschiebung keinerlei Widerstand mehr entgegen, und es würde bei senkrechter Belastung P zusammenbrechen, wenn es nicht durch die benachbarten Reifenelemente gestützt würde. Bemerkenswert in Abb. 8 ist weiterhin, daß die Seitensteifigkeit mit zunehmendem H/B-Wert abfällt.

Eine Begleiterscheinung der seitlichen Verformung ist die gleichzeitige Abnahme der Breite b der Bodendruckfläche und der damit verbundene Abfall der Kraftaufnahme P, wenn die Einfederung λ konstant gehalten wird. Sie läßt sich nach (19) berechnen. Die Abnahme von b/B

macht sich allerdings erst bei größeren Seitenverschiebungen λ_s bemerkbar (Abb. 9). Im Bereich kleiner λ_s-Werte bleibt b/B und damit P praktisch konstant. Diese Erscheinung tritt bei experimentellen Untersuchungen am Reifen[1] und natürlich auch im Betrieb eines Fahrzeuges auf. Aus praktischen Gründen hält man beim Versuch nicht die Einfederung λ, sondern die Belastung P konstant. Die Folge ist, daß bei größeren λ_s die Einfederung λ zunimmt (Abb. 10).

5. Neigung der Radebene bei abgeplattetem Reifenelement. Neigt man die Radebene bei abgeplattetem Reifenelement um den Winkel σ zur Normalen auf die Bodenebene, wobei der Radkörper um die Durchdringungslinie zwischen Radebene und Bodenebene geschwenkt wird (Abb. 11), so treten ähnliche Wirkungen auf wie bei seitlicher Verschiebung. Die an die Bodendruckfläche grenzenden Teile der Reifenschale werden auf- bzw. abgewickelt, und die Krümmungshalbmesser r sowie die Winkel γ bekommen rechts und links unterschiedliche Größen.

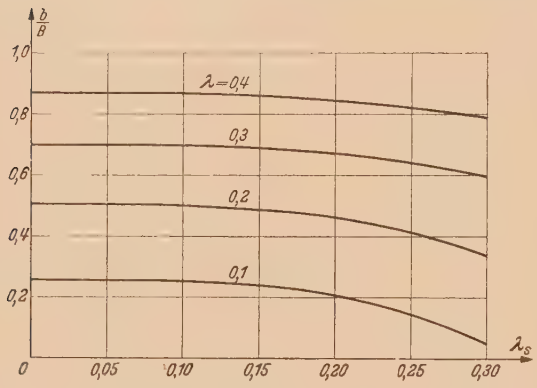


Abb. 9. Änderung der Breite der Bodendruckfläche bei seitlicher Verformung des Reifenelementes; H/B = 0,8.

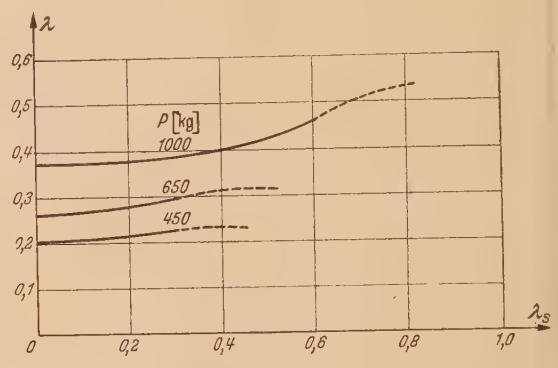


Abb. 10. Änderung der Einfederung infolge der seitlichen Verformung des Reifens 380 × 150 bei konstanter Radlast nach Versuchen der DVL.

Die Beziehungen zur Berechnung dieses Verformungszustandes lauten

$$\left.\begin{aligned} r_1(\cos\sigma+\cos\gamma_1)-b_1\sin\sigma &= H-f\,,\\ r_2(\cos\sigma+\cos\gamma_2)+b_2\sin\sigma &= H-f \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

und

$$\left.\begin{aligned} b_1\cos\sigma+r_1(\sin\sigma+\sin\gamma_1) &= \tfrac{1}{2}B_F\,,\\ b_2\cos\sigma-r_2(\sin\sigma-\sin\gamma_2) &= \tfrac{1}{2}B_F \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

sowie für die Abwicklung der Schale

$$\tfrac{1}{2}u = b_1+r_1(\pi+\sigma-\gamma_1) = b_2+r_2(\pi-\sigma-\gamma_2) = \tfrac{1}{2}B(\pi-\arcsin\psi)\,. \tag{25}$$

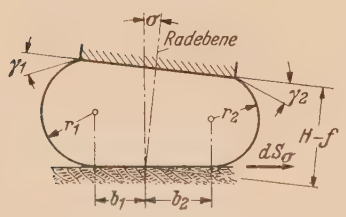


Abb. 11. Verformung des abgeplatteten Reifenelementes durch Neigen der Radebene.

Die Auflösung dieser Gleichungen ist schwieriger als bei seitlicher Verschiebung. Da praktisch aber nur kleine Winkel σ in Betracht kommen, kann man $\sin\sigma=\sigma$ und $\cos\sigma=1$ setzen. Darüber hinaus sollen entsprechend einer Beschränkung auf kleine Verformungen wieder die den Gleichungen (14a) bis (16a) zugrunde liegenden Beziehungen benutzt werden. Auf diese Weise erhält man aus (23) bis (25):

$$(1+\cos\gamma)\,\Delta r - r\sin\gamma\,\Delta\gamma - \tfrac{1}{2}b\,\sigma = 0\,, \tag{23a}$$

$$2\,\Delta b + 2\sin\gamma\,\Delta r + 2\,r\,(\cos\gamma\,\Delta\gamma+\sigma) = 0\,, \tag{24a}$$

$$2\,\Delta b + 2\,(\pi-\gamma)\,\Delta r - 2\,r\,(\Delta\gamma-\sigma) = 0\,. \tag{25a}$$

Hieraus folgt

$$\Delta r\left[2-\frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}(\pi-\gamma)\right] = \frac{1}{2}\,b\,\sigma\,. \tag{26}$$

[1] *H. Schrode*, Jahrb. 1942 der deutschen Luftfahrtforschung I, S. 686.

Es zeigt sich hiernach, daß auch bei Neigung der Radebene zur Erfüllung des statischen Kräftegleichgewichts notwendigerweise vom Boden eine Seitenkraft dS_σ ausgeübt werden muß (Abb. 11), für die auch (20) gilt. Man erhält dann mit (26)

$$dS_\sigma = \sigma p B \frac{b/B}{2 - \frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}(\pi - \gamma)} dy \,. \tag{27}$$

Die Darstellung dieser Beziehung in Abb. 12 zeigt, daß dS_σ mit zunehmender Einfederung λ von Null zunächst bis zu einem Höchstwert ansteigt und dann wieder abfällt. Der Verlauf von dS_σ hat also einen ganz anderen Charakter als bei seitlicher Verformung (Abb. 8). Der Aufbau von (27) legt es nahe, die Seitenkraft mit Hilfe der Beziehung für die Kraftaufnahme dP des Reifenelementes, $dP = b\,p\,dy$, auf folgende Form zu bringen:

$$dS_\sigma = \tilde{c}_{s\sigma}\, dP\, \sigma \,, \tag{28}$$

so daß dS_σ proportional der Kraftaufnahme dP des Reifenelementes, der Neigung σ und dem Beiwert $\tilde{c}_{s\sigma}$ ist, wo der Beiwert

$$\tilde{c}_{s\sigma} = \frac{1}{2 - \frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}(\pi - \gamma)} \tag{29}$$

eine Funktion des Parameters H/B und der Einfederung λ ist (Abb. 13). Er nimmt mit größer werdendem λ ab. Für große H/B ergeben sich kleinere $\tilde{c}_{s\sigma}$ als für kleinere H/B-Werte.

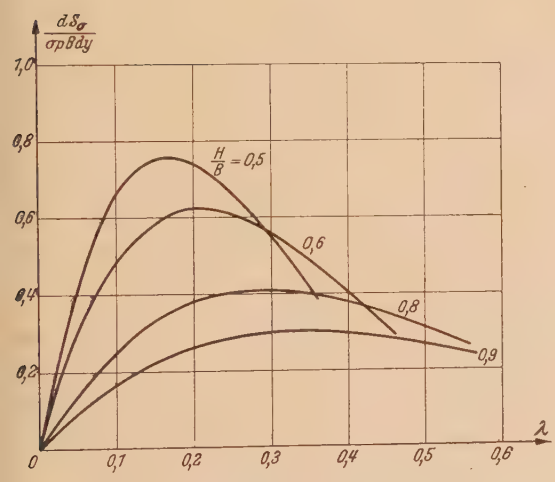


Abb. 12. Seitenkraft am Reifenelement infolge Neigens der Radebene.

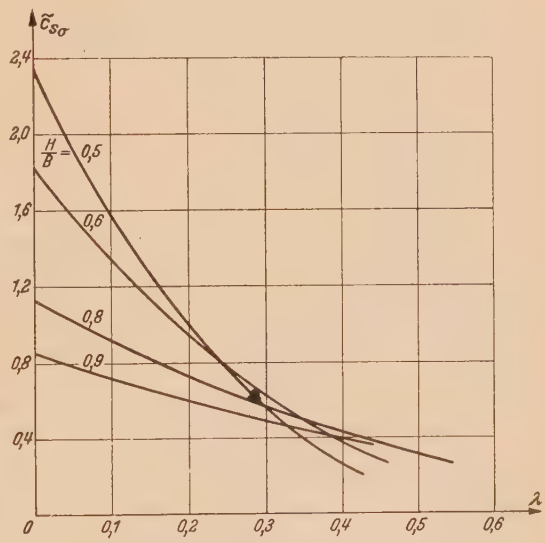


Abb. 13. Dimensionsloser Beiwert für die Seitenkraft am Reifenelement infolge Neigens der Radebene.

6. Verformung und Kräfte am Gesamtreifen. In diesem Abschnitt soll auf einige qualitative Folgerungen eingegangen werden, die sich aus den Ergebnissen der beschriebenen Rechnungen für das Verhalten des Gesamtreifens herleiten lassen.

Bei den Untersuchungen am kreisförmigen Reifenelement wurde bereits die Feststellung gemacht, daß die Ermittlung der Gestalt der verformten Schale eine rein geometrische Aufgabe ist, also vom Innendruck des Reifens unabhängig ist. Hierbei wurde allerdings vorausgesetzt, daß das Reifenelement keinerlei Dehnungen oder Verzerrungen in seiner Ebene erfährt. Bei einer zweifach gekrümmten Schale, wie sie ein Luftreifen tatsächlich darstellt, sind aber mit der Verformung zwangsläufig Verzerrungen der Reifenwand in ihrer Ebene verbunden. Um die Mechanik der Verformung bei Abplattung oder dergleichen verstehen zu können, muß man sich zunächst einmal mit dem Verhalten eines aus der Reifenwand herausgeschnittenen Teilchens befassen. Denn die Eigenschaften der Reifenschale, die im allgemeinen aus einem hoch elastischen Gummi mit mehreren, sich kreuzenden Lagen von eingebetteten Kordfäden besteht, geben dem Verformungszustand sein besonderes Gepräge.

Eine wichtige Tatsache ist hierbei, daß die Dehnungssteifigkeit der Fadeneinlagen sehr viel größer als die des Gummis ist[1]. Die Längenänderung der Fäden hat daher bei der Verzerrung des Schalenelementes nur geringen Anteil, so daß man in erster Annäherung annehmen darf, die Längen der Fäden blieben unverändert. Unter dieser Voraussetzung kann die Verzerrung des Elementes $dx\,dy$ (Abb. 14) nur durch die Änderung des Kreuzungswinkels ω der Fäden bewirkt werden. Verkleinert sich ω um den Betrag $\Delta\omega$, so gelten bei unveränderter Fadenlänge die geometrischen Beziehungen

$$\frac{dx+\Delta dx}{\cos\frac{\omega-\Delta\omega}{2}}=\frac{dx}{\cos\frac{\omega}{2}}, \qquad \frac{dy+\Delta dy}{\sin\frac{\omega-\Delta\omega}{2}}=\frac{dy}{\sin\frac{\omega}{2}}. \tag{30}$$

Mit den Bezeichnungen $\varepsilon_x=\Delta dx/dx$ und $\varepsilon_y=\Delta dy/dy$ ergibt sich hieraus nach Elimination von $\Delta\omega$

$$\varepsilon_x=-\varepsilon_y\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{31}$$

In Worten ausgedrückt bedeutet dies, daß die Dehnungen ε_x und ε_y nicht beliebige, voneinander unabhängige Werte annehmen können, sondern daß sie vielmehr in einem ganz bestimmten, vom Kreuzungswinkel ω der Fäden abhängigen Verhältnis zueinander stehen. Wenn die Reifenwand in x-Richtung gedehnt wird, muß sie in y-Richtung schrumpfen und umgekehrt. Eine Schubverformung kann bei unveränderlicher Fadenlänge nicht auftreten. Diese Feststellungen kennzeichnen den Dehnungsvorgang der Reifenwand, und ihre Beachtung bietet bei einer rechnerischen Ermittlung der Verformung entsprechende Erleichterungen.

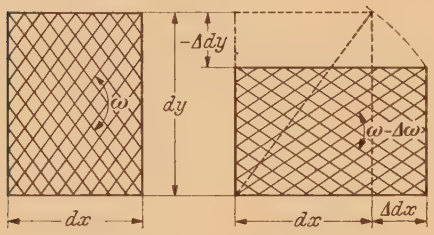


Abb. 14. Verzerrung eines Elementes der Reifenwand bei minimaler Formänderungsarbeit.

Als weitere Folge der unterschiedlichen Dehnungssteifigkeiten von Fäden und Gummi werden die auftretenden Beanspruchungen zum größten Teil von den Fäden aufgenommen, während sich der Gummi nur in geringerem Maße an der Spannungsaufnahme beteiligt. Würden die Fäden die gesamten Beanspruchungen aufnehmen, so würde bei einer Verzerrung der Schale, die ohne Längenänderung vor sich geht, keinerlei Formänderungsarbeit verrichtet werden. Wir haben also die weitere wichtige Tatsache, daß die Verzerrung der Reifenwand nur mit einer verhältnismäßig geringen Formänderungsarbeit verbunden ist. Hieraus ist zu folgern, daß der Verformungszustand am ganzen Reifen zwar nicht vom Innendruck unabhängig ist, wie beim Reifenelement mit nicht dehnbarer Wand; jedoch ist zu erwarten, daß diese Abhängigkeit vom Innendruck nur gering ist. Denn wird z. B. bei einem abgeplatteten Reifen bei konstant gehaltener Einfederung f der Innendruck erhöht, und ändert sich als Folge davon der Verformungszustand, so muß der zugehörigen Verdichtungs- bzw. Expansionsarbeit des Füllgases die Formänderungsarbeit der Reifenschale das Gleichgewicht halten. Ist letztere klein oder sogar gleich Null, so wird also auch die Änderung des Verformungszustandes nur gering sein oder gar nicht auftreten. Auch der noch nicht erwähnte Einfluß der an sich geringen Biegesteifigkeit der Reifenwand auf den Verformungszustand ist nur von untergeordneter Größe.

Dieser Sachverhalt wird durch Meßergebnisse bestätigt. Irgendeine gemessene Verformungsgröße kann zweckmäßig als Funktion eines kennzeichnenden Verformungsparameters unabhängig vom Fülldruck dargestellt werden. Zur Veranschaulichung zeigt Abb. 15 als gemessene Verformungsgröße die Größe F der Bodendruckfläche bei Abplattung als Funktion des kennzeichnenden Verformungsparameters, für den in diesem Falle die Einfederung λ gewählt wurde, nach Messungen[2] der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL.). Diese Darstellung bestätigt sehr gut den geringen Einfluß des in breiten Grenzen variierten Fülldruckes p_0. Eine systematische Abhängigkeit von p_0 ist nicht zu erkennen; sein Einfluß liegt also in der Größe der Versuchsungenauigkeit.

Als zweites Beispiel wird die mit der Abplattung einhergehende Änderung des Luftvolumens Δ Vol demonstriert. Diese muß ebenfalls nur eine Funktion von λ sein, wenn der Verformungszustand vom Fülldruck unabhängig ist. Eine direkte Messung der Luftvolumenänderung ist schlecht möglich, jedoch läßt sich aus der Zunahme des Innendruckes auf die Änderung des

[1] *H. Hencky*, Mechanical Engineering 57 (1935) S. 149.
[2] *F. Michael*, Jahrb. 1932 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt III, S. 17.

Luftvolumens schließen. Bei langsamer Einfederung findet eine isothermische Verdichtung der Luft statt, so daß die Druckänderung

$$\frac{\bar{p}_0 + \Delta p}{\bar{p}_0} = \frac{\mathrm{Vol}}{\mathrm{Vol} + \Delta\,\mathrm{Vol}} \tag{32}$$

oder die Druckzunahme

$$\frac{\Delta p}{\bar{p}_0} = -\frac{\Delta\,\mathrm{Vol}/\mathrm{Vol}}{1 + \Delta\,\mathrm{Vol}/\mathrm{Vol}} \approx -\frac{\Delta\,\mathrm{Vol}}{\mathrm{Vol}} \tag{33}$$

beträgt, wenn $\bar{p}_0 \approx p_0 + 1$ der absolute Fülldruck (ata), p_0 der Überdruck (atü) und Vol das Luftvolumen des unverformten Reifens ist. In Abb. 16 ist $\Delta p/\bar{p}_0$ über λ aufgetragen. Auch hier ist wieder der Einfluß des Fülldruckes kaum größer als die versuchsbedingte Streuung der Meßpunkte.

Diese Betrachtungen liefern auch geeignete Hinweise für das Verhalten von Gesamtkräften am Reifen. Eine am Reifen angreifende Kraftkomponente ergibt sich bei biegeweicher Reifen-

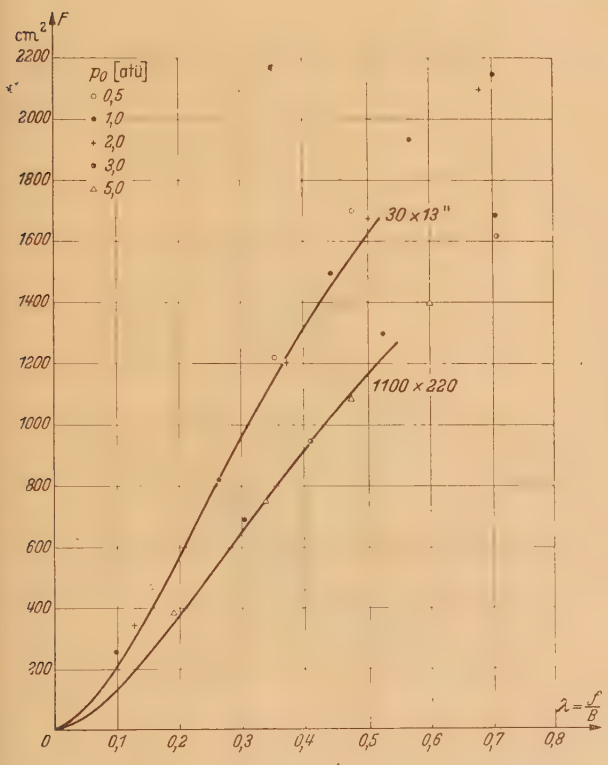


Abb. 15. Größe der Bodendruckfläche bei Abplattung des Reifens. Meßpunkte nach DVL. Rechnung nach (38) für H/B = 0,75.

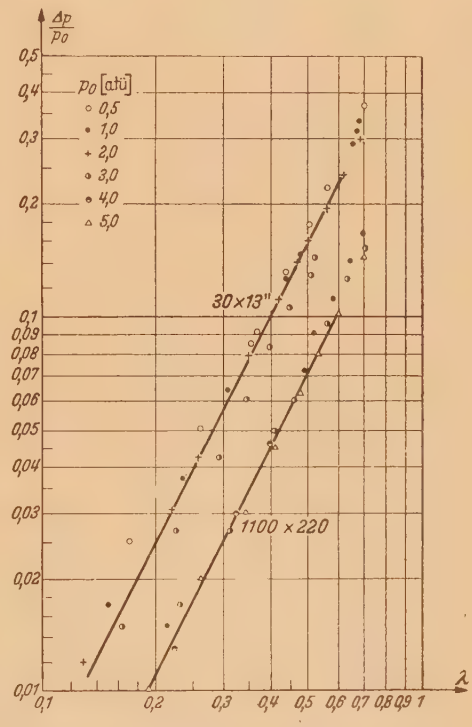


Abb. 16. Innendruckänderung bei Abplattung des Reifens. Meßpunkte nach DVL. Rechnung nach (39) für H/B = 0,75.

schale ganz allgemein als Produkt aus einem durch den Verformungszustand festgelegten Faktor und dem jeweils herrschenden Innendruck $p = p_0 + \Delta p$. Im Falle der senkrecht zum Boden wirkenden Kraftkomponente P ist dieser Faktor gleich der Größe der Bodendruckfläche F, also

$$P = p\,F\,. \tag{34}$$

Das Verhältnis zweier Kraftkomponenten, die bei demselben Verformungszustand auftreten, ist, weil der Druck p in beiden Fällen gleich groß ist, hauptsächlich eine Funktion des Verformungszustandes und wie dieser vom Innendruck fast unabhängig.

Zur Berücksichtigung der Wandbiegesteifigkeit ist dann neben dem Produkt aus Verformungsfaktor und Innendruck noch ein additives, ebenfalls vom Verformungszustand abhängiges Glied hinzuzufügen. Der Einfluß der Biegesteifigkeit bleibt aber fast ausnahmslos von sekundärer Größe. Bildet man nun wieder das Verhältnis zweier, zu gleichem Verformungszustand gehörigen Kraftkomponenten, so hebt sich die Wirkung der Biegesteifigkeit teilweise gegenseitig auf. Lage

und Richtung der resultierenden Bodenkraft sind also auch jetzt noch vom Innendruck fast unabhängig. Bei Darstellung gemessener Kräfte macht man sich diese Tatsache in zweckmäßiger Weise zunutze. Insbesondere empfiehlt es sich, die senkrechte Komponente P der Bodenkraft als Bezugsgröße zu wählen, da diese als Belastung des Rades eine kennzeichnende Größe darstellt.

Im Falle einer Seitenkraft S, die durch eine Seitenverformung $\lambda_s = f_s/B$ am Stand erzeugt wird, ist der Verformungszustand durch die zwei Parameter λ und λ_s beschrieben. Es wäre dann S/P als Funktion von λ und λ_s darzustellen. Bei Beschränkung auf hinreichend kleine Seitenverformungen besteht Proportionalität zwischen λ_s und S. Nach vorstehenden Ausführungen scheint dann der Ansatz

$$S = c_s \, P \, \lambda_s \tag{35}$$

für eine Darstellung geeignet zu sein. Abb. 17 zeigt die diesbezügliche Auswertung von Messungen an zwei Reifen verschiedener Größe, aber ähnlichen Aufbaues. Es wurde der Reziprokwert $1/c_s$ aufgetragen, weil c_s gegen unendlich geht, wenn λ sehr klein wird. Dieses kommt daher, daß die Seitenkraft nahezu unabhängig von der Belastung P ist. Diese Darstellungart, bei der die Ablesegenauigkeit für große c_s-Werte abnimmt, erweist sich auch deshalb zweckmäßig, weil die Meßergebnisse bei kleiner Einfederung λ unzuverlässig werden. Infolge der geringen Belastung P treten nämlich bei kleinem λ an den Enden der Bodendruckfläche mitunter unkontrollierbare Gleitungen auf, die die Ergebnisse der Messung verfälschen.

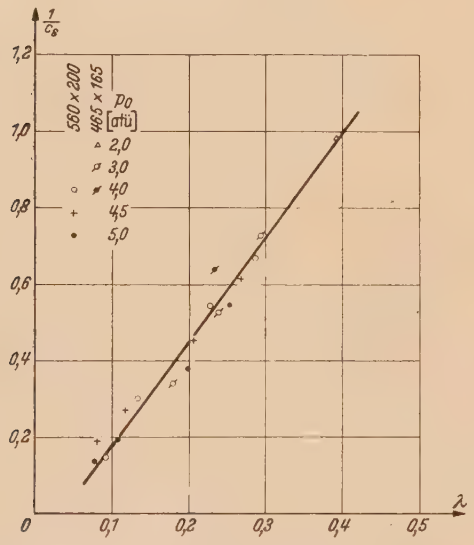


Abb. 17. Beiwert der Seitenkraft am Reifen infolge Seitenverformung nach Messungen von *Focke-Wulf*-Flugzeugbau (Reifen 560×200) und FKFS (Reifen 465×165).

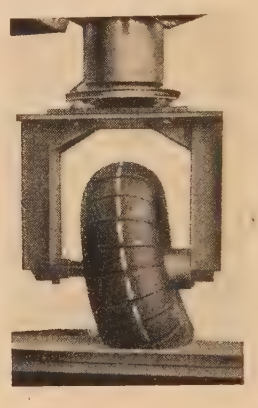


Abb. 18. Seitliche Verformung des Reifens am Stand nach *H. Schrode*.

Die Darstellung Abb. 17 gestattet nun für den Reifen 465×165 bei jedem vorkommenden Wert der Radlast P und des Fülldruckes p_0 die Seitensteifigkeit zu bestimmen, wenn P als Funktion von λ und p_0 bekannt ist. Durch die Tatsache, daß die Meßergebnisse zweier verschiedener Reifen, die überdies noch an verschiedenen Stellen mit verschiedenen Versuchseinrichtungen durchgeführt wurden, ziemlich gut auf eine Kurve fallen, wird die Übertragbarkeit auf Reifen anderer Größe ähnlichen Aufbaues erhärtet.

Nach den Rechnungen am Reifenelement wäre eine Abnahme der Seitensteifigkeit zu erwarten, wenn P anwächst. Dieses ist aus Abb. 17 nicht ohne weiteres zu erkennen. Bei der Messung[1] des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren in Stuttgart (FKFS.), bei der bei konstant gehaltenem Fülldruck die Belastung P variiert wurde, zeigt sich eindeutig eine leichte Abnahme der Seitenkraft, wenn P anwächst. Daß der Gradient $dS/d\lambda_s$ am Reifen nicht so stark mit λ abfällt wie nach der Rechnung (Abb. 8), hat seine Ursache darin, daß bei der Seitenverformung auch die der Bodendruckfläche benachbarten Reifenelemente verformt werden (Abb. 18) und somit wesentlich zur Seitensteifigkeit des Reifens beitragen.

[1] *R. Harling*, Seitenführungskräfte bei Schräglauf von Flugzeugreifen. Bericht 140 der Lilienthal-Ges. f. Luftfahrtforschung (1941), S. 4.

Die sinngemäße Anwendung dieser Darstellungsart erweist sich für Seitenkräfte bei Schräglauf, Tangentialkräfte bei Bremsung oder Antrieb, Momente usw. als geeignet. Abb. 19 zeigt noch die Kraftmessung bei Tangentialverformung des Reifens, die dadurch erzeugt wird, daß das Rad gegen den Boden um den Betrag f_T verschoben wird, wobei gleichzeitig eine Drehung des Radkörpers um die Radachse verhindert wird. Auch dieses Bild bestätigt sehr schön, daß der Beiwert c_T fast nur eine Funktion der Einfederung λ ist.

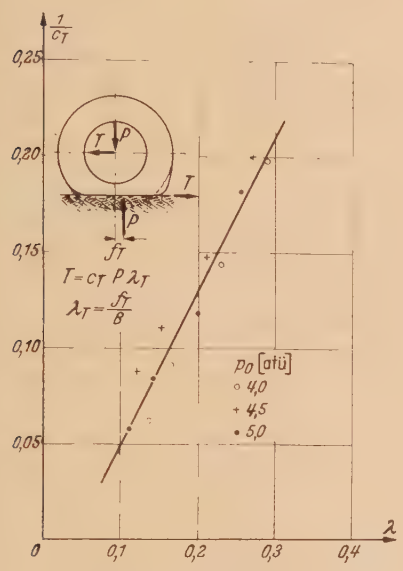


Abb. 19. Beiwert der Tangentialkraft am Reifen 560 × 200 nach Messungen vom *Focke Wulf*-Flugzeugbau.

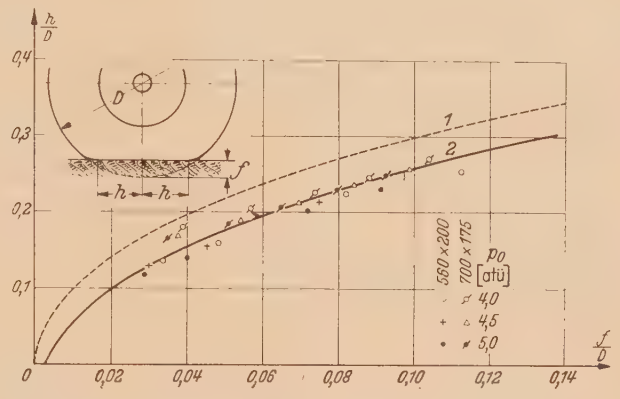


Abb. 20. Länge der Bodendruckfläche bei Abplattung des Reifens. Meßpunkte nach *Focke-Wulf*-Flugzeugbau.
1 Sehne des Kreisabschnittes: $h/B = \sqrt{f/D - (f/D)^2}$, 2 Näherung (37).

7. Berechnung der Verformung des Reifens bei Abplattung. Die rechnerischen Untersuchungen am Reifenelement liefern aber nicht nur interessante qualitative Ergebnisse, sondern können mitunter auch der Ausgangspunkt für eine quantitative Bestimmung der am Reifen auftretenden Kräfte sein. So soll hier die Verformung des Reifens bei Abplattung behandelt werden.

Die am Reifenelement berechnete Größe b entspricht ziemlich genau der Abmessung der kleinen Achse b der Bodendruckfläche, die man experimentell beobachtet (Abb. 2). Diese Tatsache überrascht nicht, wenn man sich überlegt, daß im Mittelschnitt der Bodendruckfläche aus Symmetriegründen tatsächlich in Übereinstimmung mit der der Rechnung zugrundeliegenden Voraussetzung ein von Schubkräften freier Spannungszustand herrschen muß. Die bei der Rechnung vernachlässigte Krümmung in Umfangsrichtung kann sich aber nicht stark auswirken. Die Biegesteifigkeit der Reifenschale übt ihren Einfluß hauptsächlich in der Nähe der Felge in der Weise aus, daß die Änderungen des Winkels γ (Abb. 2) durch die Felgenhörner beeinträchtigt werden. Diese Auswirkung kann man dadurch berücksichtigen, daß man die der Rechnung zugrundezulegende Größe H entsprechend kleiner als die tatsächliche H_F des Reifenprofiles einsetzt (Abb. 1). Der Ausdruck

$$\frac{H}{B} \approx \frac{H_F}{B} - 0{,}15 \tag{36}$$

stellt einen Wert dar, der sich beim Vergleich mit Meßergebnissen als brauchbar erwiesen hat.

Bezüglich der Länge der Bodendruckfläche kann man überlegungsgemäß sagen, daß sie in der Größenordnung der Sehne des entsprechenden Kreisabschnittes mit der Pfeilhöhe f liegen muß. Genauere Angaben sind ohne umfangreiche Rechnung nur experimentell zu erhalten. Abb. 20 zeigt die Auftragung von Meßergebnissen, aus denen man ersieht, daß die Länge $2\,h$ der Bodendruckfläche kleiner als die Sehne des Kreisabschnittes ist und sich näherungsweise durch die Beziehung

$$\frac{h}{B} = \sqrt{\frac{f}{D} - \left(\frac{f}{D}\right)^2} - 0{,}04 \tag{37}$$

wiedergeben läßt. Eine systematische Abhängigkeit vom Formparameter B/D und vom Innendruck p_0 lassen die Versuchswerte nicht erkennen.

Nachdem nun größte Breite und Länge der Bodendruckfläche bekannt sind, fehlt zur Berechnung ihrer Flächengröße F nur noch der Völligkeitsgrad. Dieser kann für die Bodendruckfläche, die eine etwas völligere Gestalt als eine Ellipse hat, nur in engen Grenzen variieren. Er darf etwa mit 0,85 eingesetzt werden; damit ergibt sich

$$F = 1{,}7\, h\, b\,. \tag{38}$$

Abb. 15 zeigt auf diese Weise erhaltene Rechnungsergebnisse im Vergleich mit Messungen[1], die bis zu Werten $\lambda = 0{,}5$ eine befriedigende Übereinstimmung mit der Messung bestätigt. Bei größeren λ-Werten sind die der Rechnung zugrundeliegenden Annahmen offenbar nicht mehr erfüllt.

Die mit der Abplattung des Reifens einhergehende Änderung des Luftvolumens läßt sich nach folgender Überlegung berechnen: Stellt man sich einen Reifen mit biegeweicher Reifenwand vor und nimmt man eine so kleine Änderung der Einfederung an, daß die Innendruckänderung unberücksichtigt bleiben darf, so ist die dabei von der Luftfüllung geleistete Verdichtungsarbeit gleich der Volumenänderung d Vol mal dem Innendruck p. Diese Arbeit muß gleich der äußeren Arbeit $P\,d\,f$ sein. Setzt man hierin P nach (34) ein, so erhält man nach Wegstreichen des Innendruckes und Integration für die Änderung des Luftvolumens folgende Gleichung:

$$\Delta\,\mathrm{Vol} = -\int_0 F\,df\,. \tag{39}$$

Abweichungen von diesem Wert treten dann auf, wenn bei der Abplattung Formänderungsarbeit von der Reifenwand geleistet wird. Da die Bodendruckfläche F in erster Näherung linear mit der Einfederung f anwächst, nimmt Δ Vol annähernd quadratisch mit f zu. In Abb. 16 ist die über die gemessene Innendruckänderung ermittelte Volumenänderung mit der Rechnung verglichen. Auch hierbei zeigt sich wieder für $\lambda \leqq 0{,}5$ befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung.

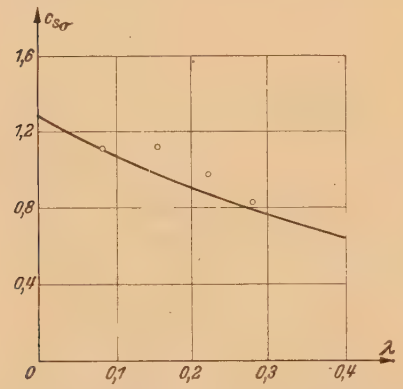


Abb. 21. Beiwert der Seitenkraft bei Neigung der Radebene. Rechnung nach (41) für $H/B = 0{,}75$. Meßpunkte nach FKFS (Reifen 700×175) am rollenden Rad.

8. Berechnung der Seitenkraft bei Neigung der Radebene (Sturz). Als weiteres Beispiel für die quantitative Verwertung der am Reifenelement errechneten Ergebnisse soll die Berechnung der Seitenkraft bei Neigung der Radebene behandelt werden. Die in (29) hergeleitete Beziehung wird einfach für jedes Reifenelement, das mit dem Boden in Berührung steht, als gültig angesehen. Für die übrigen Reifenelemente wird angenommen, daß sie durch Neigen der Radebene keine zusätzliche Verformung erfahren. Dann ergibt sich die gesamte Seitenkraft am Reifen durch Integration von (28) zu

$$S_\sigma = \sigma \int_0^P \tilde{c}_{s\sigma}\, d\,P\,. \tag{40}$$

Unter der Annahme einer elliptischen Bodendruckfläche ergibt die Ausrechnung des Integrals, wenn gemäß obiger Ausführungen die Seitenkraft auf die Form $S_\sigma = c_{s\sigma}\, P\, \sigma$ gebracht wird,

$$c_{s\sigma} \approx 0{,}25\, \tilde{c}_{s\sigma}(0) + 0{,}75\, \tilde{c}_{s\sigma}(\lambda)\,; \tag{41}$$

$\tilde{c}_{s\sigma}(0)$ bedeutet den Wert $\tilde{c}_{s\sigma}(\lambda)$ für $\lambda = 0$.

Der Fall, daß der Reifen am Stand um den Winkel σ geneigt wird, wobei gleichzeitig keine seitliche Verformung λ_s auftreten soll, hat praktisch keine große Bedeutung. Dagegen kommt es häufig vor, daß ein Rad unter dem Winkel σ zur Senkrechten geneigt am Fahrzeug angeordnet wird (Sturz). Bei Geradeausrollen des Rades stellt sich dann die seitliche Auslenkung selbständig etwa auf den Wert $\lambda_s = 0$ ein. Die auftretende Seitenkraft läßt sich dann nach der in (41) hergeleiteten Beziehung ermitteln. Abb. 21 zeigt die an einem Reifen gemessene Seitenkraft im Vergleich zu unserer Rechnung.

[1] *F. Michael*, Jahrb. 1932 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt III, S. 17.

Im Schrifttum[1] wird das Auftreten einer Seitenkraft bei Sturz so erklärt, daß der unter dem Winkel σ laufende Reifen eine seitliche Verformung λ_s erleidet, als deren Folge die beobachtete Seitenkraft entsteht. Diese Auffassung kann nach der vorliegenden, mit der Messung ziemlich übereinstimmenden Rechnung als widerlegt gelten. Eine seitliche Verformung dürfte an dieser Erscheinung nur in ganz geringem Maße beteiligt sein. Die Seitenkraft ist vielmehr fast ausschließlich auf die Verformung zurückzuführen, die die abgeplatteten Reifenelemente erfahren, wenn die Radebene um den Winkel σ geneigt wird.

9. Zusammenfassung. Unter stark vereinfachenden Annahmen wurden an einem Reifenelement der Verformungszustand bei Abplattung mit überlagerter seitlicher Verschiebung und Neigung der Radebene berechnet, und die zugehörigen Kräfte ermittelt. Nach einer qualitativen Erörterung des Dehnungsverhaltens der Reifenwand wurde aus den Ergebnissen die sehr wichtige Folgerung gezogen, daß sowohl der Verformungszustand als auch die Lage und Richtung der resultierenden Bodenkraft am Reifen vom Innendruck nur sehr wenig abhängen. Zur Erhärtung dieser Feststellung wurden entsprechende Auswertungen einiger Messungen an Flugzeugreifen wiedergegeben. Anschließend wurden dann einige quantitative Nutzanwendungen der am Reifenelement gewonnenen Rechnungsergebnisse gebracht.

Abschließend sei bemerkt, daß dem Verfasser keine geeigneten Messungen an Fahrzeugreifen zur Verfügung standen und deshalb nur Flugzeugreifen zum Vergleich herangezogen werden konnten. Fahrzeugreifen haben im allgemeinen eine größere Wanddicke, da sie für größere Lebensdauer entwickelt werden. Es ist aber wohl kaum zu befürchten, daß diese größere Wandstärke ein grundsätzlich anderes Verhalten des Reifens hervorruft.

(Eingegangen am 18. März 1948.)

Anschrift des Verfassers: *Julius Rotta*, (20b) Göttingen, Böttingerstraße 6/8.

[1] *E. Maier*, Zur Frage der Seitenbeanspruchungen von Flugzeugfahrwerken. Bericht 169 der Lilienthal-Ges. f. Luftfahrtforschung (1943), S. 19.

Berechnung einer auf elastischem Halbraum aufliegenden, unendlich erstreckten Platte.

Von S. Woinowsky-Krieger.

1. Einleitung. Will man bei einer Berechnung von Fundamentplatten über die Annahme einer ebenen (bei zentrischer Belastung gleichförmigen) Verteilung des Bodendruckes über die Sohle hinausgehen, so hat man es in der Hauptsache zwischen der Bettungstheorie von *Winkler-Zimmermann* und der Theorie des elastischen Halbraumes als Plattenunterlage zu wählen.

Die zuerst von *Winkler* und *Zimmermann* zur Berechnung des Eisenbahnoberbaues entwickelte Theorie setzt bekanntlich den spezifischen Sohlendruck der mit einem konstanten Faktor, der sogenannten Bettungsziffer, multiplizierten Einsenkung an der betreffenden Stelle einfach gleich und entspricht mechanisch dem Verhalten eines biegsamen, schwimmenden Körpers. Die Anwendung dieser Theorie auf röllige Böden führt zu plausiblen Druckverteilungen; will man aber die Ergebnisse der Theorie auch zahlenmäßig in Einklang mit dem Beobachtungsmaterial bringen, so sieht man sich gezwungen, die Bettungs- oder Bodenziffer nicht nur von der Art des Baugrundes, sondern auch von der Gestalt der Fundamentplatte, von ihrer Größe und sogar von der Art der Lastverteilung abhängig zu machen. Die praktische Brauchbarkeit des Berechnungsverfahrens wird hierdurch sehr in Frage gestellt.

Der Vorteil, die Fundamentunterlage als elastischen Halbraum aufzufassen, besteht, von theoretischen Erwägungen ganz abgesehen, in der Möglichkeit, die in die Rechnung eingehenden elastischen Konstanten durch Schwingungsversuche zu ermitteln und somit eine zuverlässige Grundlage für die Anwendung der Theorie zu schaffen.

Die auf elastisch-isotropem Halbraum aufliegende Kreisplatte unter achsensymmetrischer Säulenlast ist bereits von *A. Habel*[1] mit Hilfe der Differenzenrechnung behandelt worden. Bei wohlbekannten Vorteilen dieser Methode ermöglicht sie weder eine bequeme Erfassung stark konzentrierter Lasten noch eine Übersicht über das Gesamtproblem. Für die unendlich erstreckte Fundamentplatte existiert indes eine strenge Lösung. Sie numerisch auszuwerten und den baupraktischen Anwendungen zugänglich zu machen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Allen weiteren Ausführungen liegen folgende Voraussetzungen zugrunde:

1. Der Fundamentkörper ist eine unbegrenzte isotrope dünne Platte.

2. Diese Platte liegt reibungslos auf dem isotropen elastischen Halbraum als Unterlage auf und übt auf seine Grenzebene lediglich einen normalgerichteten Druck aus.

3. Eine Berührung zwischen der Platte und ihrer Unterlage wird auch dann angenommen, wenn jener Druck negative Werte annimmt. Praktisch werden die auftretenden geringen Zugspannungen durch das Eigengewicht der Platte ausgeglichen.

2. Allgemeine Lösung bei achsensymmetrischer Belastung. Es bedeute E den Elastizitätsmodul der Platte, ν die Querdehnungszahl, h die Dicke der Platte und $D = E\,h^3/12(1-\nu^2)$ ihre Biegesteifigkeit. Es seien ferner E_0 und ν_0 die entsprechenden Konstanten der Unterlage. Wir benutzen noch die Abkürzungen

$$K_0 = \frac{E_0}{2\,(1-\nu_0^2)}, \qquad l = \sqrt{\frac{D}{K_0}}, \tag{1}$$

worin K_0 als Kennziffer der Unterlage gelten kann, während l eine Bezugslänge bezeichnet. In Tabelle 1 sind einige Zahlenwerte angeführt, die sich aus Bodenuntersuchungen mit schwingungserzeugender Last ergeben haben[2]. Da röllige oder bindige Böden nur sehr bedingt als elastische Körper gelten können, ist freilich bei der Anwendung jener Konstanten auf das vorliegende Problem einige Vorsicht geboten.

---

[1] *A. Habel*, Bauingenieur 18 (1937) S. 188.

[2] *A. Ramspeck*, Veröffentl. der Degebo, Heft 4 (1936), S. 37.

Tabelle 1.

Bodenart	E_0 kg/cm²	ν_0	K_0 kg/cm²
Nasser Ton	1210	0,50	807
Mittelkies	1720	0,47	1104
Mittelsand	1200	0,45	752
Löß, trocken	3260	0,44	2021
Mehlsand	570	0,42	346
Kies und Sand, dicht gelagert	2790	0,31	1543

Verteilt sich nun eine schneidenförmige Last vom Gesamtbetrage P gleichförmig auf einen Kreisumfang vom Halbmesser ϱ, so ist die Einsenkung der Platte im Abstande r vom Mittelpunkt des Lastkreises durch das Integral

$$w = \frac{Pl^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\, J_0(\lambda \xi)\, d\lambda}{1+\lambda^3} \tag{2}$$

über *Bessel*sche Funktionen nullter Ordnung vom Argument $x = r/l$ bzw. $\xi = \varrho/l$ gegeben. Die zugehörige Pressung zwischen der Platte und Unterlage ist

$$q = \frac{P}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\, J_0(\lambda \xi)\, \lambda\, d\lambda}{1+\lambda^3} . \tag{3}$$

Zur Berücksichtigung einer beliebigen achsensymmetrischen Belastung $p(\xi)$ genügt es, den Wert P in den Einflußfunktionen (2) und (3) durch $2\pi l p(\xi)\, d\xi$ zu ersetzen und die so erhaltenen Ausdrücke über die Lastfläche auszuintegrieren.

Man kann die Ergebnisse (2) und (3) beispielsweise als Grenzfall einer umgekehrten Pilzdecke gewinnen, deren Säulendrücke achsensymmetrisch verteilt sind, und deren Säulenabstände man unbegrenzt wachsen läßt[1]. *Marguerre*[2] erhielt dasselbe Ergebnis im Sonderfall einer Punktlast als achsensymmetrisches Analogon des betreffenden ebenen Problems. *Holl*[3] hat eine hinsichtlich der Beschaffenheit der Unterlage sehr allgemein gehaltene Integralgleichung aufgestellt und ihre Lösung, die als Sonderfall auch unsere Lösung enthält, angegeben. Diese letztere Lösung ist schließlich auch von *Hogg*[4] und *Schächter*[5] gefunden worden.

Geht man nun von der *Winkler*-Hypothese aus und setzt demzufolge $q_1 = K_1 w_1$, worin K_1 die Bettungsziffer ist, so erhält man, wie sich zeigen läßt[6], an Stelle von (2)

$$w_1 = \frac{Pl_1^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x_1)\, J_0(\lambda \xi_1)\, \lambda\, d\lambda}{1+\lambda^4} \tag{4}$$

mit der Abkürzung

$$l_1 = \sqrt[4]{\frac{D}{K_1}} . \tag{5}$$

Die Analogie der Ausdrücke (2) und (4) kann man sich bei der numerischen Auswertung der Lösung (2) weitgehend zunutze machen.

3. Fundamentplatte mit Punktlast. Mit $\xi = 0$ gehen die Ausdrücke (2) und (3) in

$$w = \frac{Pl^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\, d\lambda}{1+\lambda^3} , \qquad q = \frac{P}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\, \lambda\, d\lambda}{1+\lambda^3} \tag{6}$$

über. Die Einsenkung und die Bodenpressung unter der Last lassen sich elementar berechnen.

---

[1] *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 250.
[2] *K. Marguerre*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) S. 229.
[3] *D. L. Holl*, Proceedings of the 5. international congress for appl. mechanics, S. 71. New York 1939.
[4] *A. H. A. Hogg*, Lond. Phil. Mag. Ser. 7, Bd. 25 (1938), S. 576.
[5] *O. J. Schächter*, Forschungshefte des Laboratoriums des WODEGO, Nr. 9 (1938) (russisch).
[6] *S. Woinowsky-Krieger*, a. a. O. S. 249.

Es ist einfach

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= \frac{Pl^2}{2\pi D}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{1+\lambda^3} = \frac{Pl^2\sqrt{3}}{9D} = 0{,}192\,\frac{Pl^2}{D}\,, \\ q(0) &= \frac{P}{2\pi l^2}\int_0^\infty \frac{\lambda\,d\lambda}{1+\lambda^3} = \frac{P\sqrt{3}}{9l^2} = 0{,}192\,\frac{P}{l^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Der Ansatz $q_1 = K_1 w_1$ führt im Falle einer Punktlast auf die bekannte Lösung von *Hertz*, die sich am einfachsten durch die *Schleicher*sche Funktion $Z_3(x_1) = \Re e\, H_0^{(1)}(x_1\sqrt{i})$ darstellen läßt[1]. Mit Rücksicht auf (4) wird also die Gleichung der elastischen Fläche

$$w_1 = \frac{Pl_1^2}{4D} Z_3(x_1) = \frac{Pl_1^2}{2\pi D}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x_1)\,\lambda\,d\lambda}{1+\lambda^4}\,, \tag{8}$$

und hieraus folgt $w_1(0) = 0{,}125\, Pl_1^2/D$ und $q(0) = 0{,}125\, P/l_1^2$. Bei gleicher Einsenkung unter der Last nach den Formeln (7) und (8) würde die maximale Pressung auf den elastischen Halbraum 2,35mal so groß sein, wie der größte Auftrieb unter der schwimmenden Platte von *Hertz*.

Die Integrale (6) lassen sich nicht auf tabulierte Funktionen zurückführen. Die Differenzen dieser Integrale und der Integrale von der Form (8) konvergieren indes so rasch, daß die numerische Beherrschung der Lösung keine Schwierigkeiten bietet.

a) Einsenkung. Für das erste der Integrale (6) gilt

$$I_w = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\,d\lambda}{1+\lambda^3} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\,\lambda\,d\lambda}{1+\lambda^4} + \int_0^\infty \frac{(1-\lambda)\,J_0(\lambda x)\,d\lambda}{(1+\lambda^3)(1+\lambda^4)}\,,$$

oder wegen (8)

$$I_w = \frac{\pi}{2} Z_3(x) + \int_0^4 \frac{(1-\lambda)\,J_0(\lambda x)\,d\lambda}{(1+\lambda^3)(1+\lambda^4)} + R\,. \tag{9}$$

Das erste Glied entnimmt man den Tabellen[2], während sich das zweite mittels der *Simpson*schen Regel auswerten läßt. Für das Restglied R gilt wegen $|J_0(\lambda x)| < 1$

$$|R| < \int_4^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^6} = \frac{1}{5\cdot 4^5}\,, \quad \text{somit } \frac{1}{2\pi}|R| < 0{,}00003\,.$$

Der durch die Unterdrückung des Restgliedes bedingte Fehler macht also weniger aus als 0,02 % des Biegungspfeiles (7).

b) Bodenpressungen. Das zweite der Integrale (6) läßt sich in der Form schreiben

$$I_q = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\,\lambda\,d\lambda}{1+\lambda^3} \approx \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\,d\lambda}{1+\lambda^2} + \int_0^4 \frac{(\lambda-1)\,J_0(\lambda x)\,d\lambda}{(1+\lambda^2)(1+\lambda^3)}\,, \tag{10}$$

und der Rest wird unterdrückt mit ähnlicher Begründung wie zuvor. Nun ist[3]

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x)\,d\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\pi}{2}\left[J_0(ix) + i\,H_0(ix)\right]. \tag{11}$$

Die hier enthaltene *Struve*sche Funktion nullter Ordnung kann allgemein durch die Potenzreihen

$$H_\nu(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m+\frac{3}{2}\right)}$$

definiert werden. Hieraus folgt

$$i\,H_0(ix) = H_0(x) - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0,2,4\ldots,}^\infty \frac{x^{2m+1}}{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots(2m+1)^2}\,.$$

---

[1] Vgl. *F. Schleicher*, Kreisplatten auf elastischer Unterlage, S. 36. Berlin 1926.

[2] Diese finden sich für $x=0$ bis $x=5$ bei *Jahnke* und *Emde*, Funktionstafeln, 2. Aufl., S. 302. Leipzig und Berlin 1933; auch bei *Schleicher* a. a. O. S. 136.

[3] Vgl. *G. N. Watson*, Theory of Bessel functions, S. 425. Cambridge 1922. Die *Struve*schen Funktionen nullter und erster Ordnung sind daselbst, S. 666 ff., tabuliert.

Die vorstehende Summe konvergiert für kleinere Werte x sehr rasch, ebenso das in (10) zuletzt stehende Integral, während sich $J_0(ix)$ und $H_0(x)$ aus Tabellen entnehmen lassen.

Der Verlauf der elastischen Fläche der Platte sowie der Bodenpressungen nach den beiden Bodendrucktheorien ist aus den Abb. 1 und 2 ersichtlich. Der Abb. 1 ist die Annahme eines gleichen Biegungspfeiles bei gleichen Werten P und D zugrunde gelegt, woraus nach S. 144 die Beziehung

$$l_1 = \frac{2}{3}\sqrt[4]{12}\, l = 1{,}241\, l,$$

also $\quad x_1 = 0{,}806\, x$

folgt. In der Abb. 2 sind in ähnlicher Weise die Ordinaten der maximalen Bodenpressung zur Deckung gebracht, welche Annahme $l_1 = 0{,}806\, l$ und $x_1 = 1{,}241\, x$ zur Folge hat.

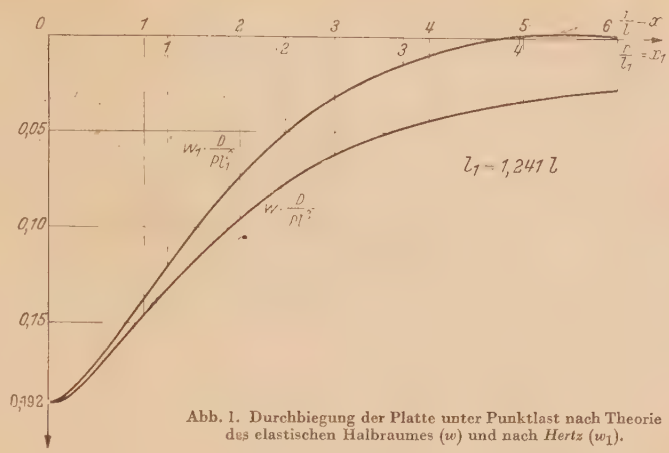


Abb. 1. Durchbiegung der Platte unter Punktlast nach Theorie des elastischen Halbraumes (w) und nach *Hertz* (w_1).

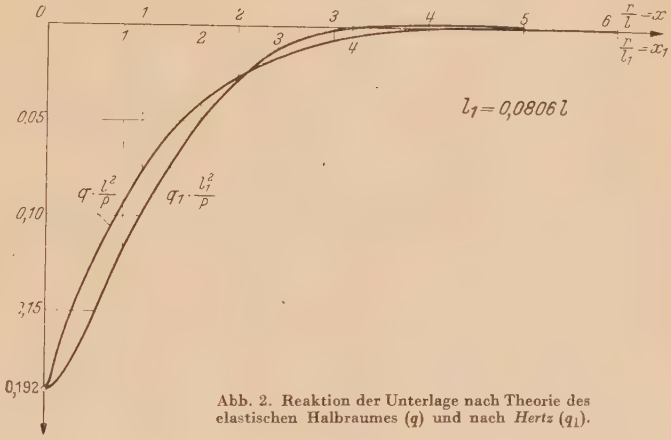


Abb. 2. Reaktion der Unterlage nach Theorie des elastischen Halbraumes (q) und nach *Hertz* (q_1).

c) Biegungsmomente. Setzt man die Querdehnungszahl $\nu = 0$, was für Stahlbeton hinreichend genau zutrifft, so ergeben sich das radiale bzw. tangentiale Moment einer auf dem elastischen Halbraum aufliegenden Platte zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{m}_r &= -D\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty \left[J_0(\lambda x) - \frac{J_1(\lambda x)}{\lambda x}\right]\frac{\lambda^2\, d\lambda}{1+\lambda^3}, \\ \overline{m}_t &= -\frac{D}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{P}{2\pi x}\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda x)\,\lambda\, d\lambda}{1+\lambda^3}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Im *Hertz*schen Falle hat man entsprechend

$$\left.\begin{aligned} \overline{m}_{1r} &= -\frac{P}{4}\left[\frac{1}{x_1} Z_3'(x_1) - Z_4(x_1)\right] = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty \left[J_0(\lambda x_1) - \frac{J_1(\lambda x_1)}{\lambda x_1}\right]\frac{\lambda^3\, d\lambda}{1+\lambda^4}, \\ \overline{m}_{1t} &= -\frac{P}{4}\,\frac{Z_3'(x_1)}{x_1} = \frac{P}{2\pi x_1}\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda x_1)\,\lambda^2\, d\lambda}{1+\lambda^4}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

worin $\quad Z_4(x_1) = \mathfrak{Im}\, H_0^{(1)}(x_1\sqrt{i})\quad$ ist.

Wie leicht einzusehen ist, lassen sich die Momente (12) aus den Funktionen $Z(x)$ und rasch konvergenten Differenzen der Integralausdrücke von (12) und (13) genau so bilden, wie dies am Beispiel der Einsenkung gezeigt wurde. Ist $\nu \neq 0$, so sind die endgültigen Momente durch die Formeln $m_r = \overline{m}_r + \nu\overline{m}_t$ und $m_t = \nu\overline{m}_r + \overline{m}_t$ bestimmt.

Bei kleinem x_1 dürfen die in den Funktionen $Z(x_1)$ von (13) enthaltenen Potenzglieder gegen das logarithmische sowie das freie Glied vernachlässigt werden. Wie sich zeigen läßt, lautet

das Ergebnis bei beliebiger Querdehnungszahl ν

$$\left.\begin{aligned} m_{1r} &= -\frac{P(1+\nu)}{4\pi}\ln\frac{\gamma x_1}{2} - \frac{P}{8\pi}(1-\nu)\,, \\ m_{1t} &= -\frac{P(1+\nu)}{4\pi}\ln\frac{\gamma x_1}{2} + \frac{P}{8\pi}(1-\nu)\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

worin $\ln\gamma = 0{,}5772$ die *Euler*sche Konstante sein soll. Ersetzt man nun in (14) x_1 durch x und bildet die Integralausdrücke für $m_r - m_{1r}$ und $m_t - m_{1t}$, so wird man finden, daß für $x=0$ diese Momentendifferenzen proportional dem Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2\,d\lambda}{1+\lambda^3} - \int_0^\infty \frac{\lambda^3\,d\lambda}{1+\lambda^4}\,,$$

d. h. Null sind. Für die Momente einer auf elastischem Halbraum aufliegenden Platte in der nächsten Umgebung einer punktförmigen Einzellast gelten also dieselben Ausdrücke (14) wie im *Hertz*schen Problem, sofern in ihnen x_1 durch x ersetzt wird. Unter der Voraussetzung $l_1 = l$ gelten denn auch die in der Abb. 3 dargestellten Momentenkurven gleichsam für beide Bodendrucktheorien.

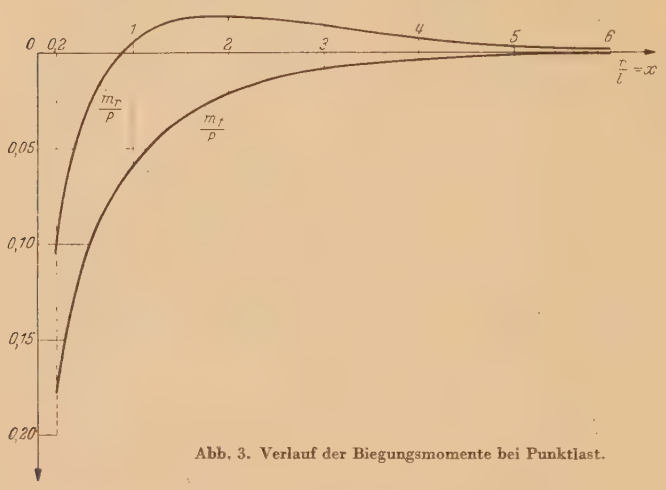


Abb. 3. Verlauf der Biegungsmomente bei Punktlast.

d) Scherkräfte. Die radialen Scherkräfte ergeben sich aus (6) zu

$$s_r = \frac{D}{l}\,\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} = -\frac{P}{2\pi l}\left(\frac{1}{x} - \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda x)\,d\lambda}{1+\lambda^3}\right). \tag{15}$$

Das vorstehende Integral läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$I_s = \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda x)\,d\lambda}{\lambda(1+\lambda^3)} - \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda x)(1-\lambda)\,d\lambda}{\lambda(1+\lambda^2)(1+\lambda^3)}\,. \tag{16}$$

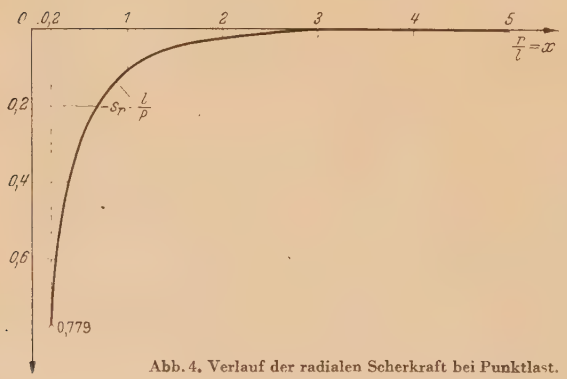


Abb. 4. Verlauf der radialen Scherkraft bei Punktlast.

Analog der Integralformel (11) gilt hier

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda x)\,d\lambda}{\lambda(1+\lambda^2)} = \frac{\pi}{2}\left[-i\,J_1(ix) + H_1(ix)\right],$$

worin

$$H_1(ix) = H_1(x) - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0,2,4}^{\infty} \frac{x^{2(m+1)}}{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots(2m+1)^2(2m+3)}$$

ist. Während die Funktionen $J_1(ix)$ und $H_1(x)$ tabuliert sind, läßt sich das rasch konvergente, in (16) zuletzt stehende Integral leicht ausrechnen. Der Verlauf der Scherkraft ist in Abb. 4 dargestellt.

4. Fundamentplatte mit einer über eine Kreisfläche verteilten Einzellast. Ist c der Halbmesser des Lastkreises, und verteilt sich der Säulendruck gleichförmig über die Fläche πc^2, so müssen wir den Wert P in (2) und (3) durch $(Pl^2/\pi c^2)\,2\pi\xi\,d\xi$ ersetzen und die beiden Integrale in den Grenzen $x=0$ und $x=c/l$ ausintegrieren. Mit der Abkürzung $c/l=\delta$ ist das Ergebnis

$$w = \frac{Pl^2}{\pi\delta D}\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda\delta)\,J_0(\lambda x)\,d\lambda}{\lambda(1+\lambda^3)} \qquad q = \frac{P}{\pi\delta l^3}\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda\delta)\,J_0(\lambda x)\,d\lambda}{1+\lambda^3}\,. \tag{17}$$

Verfährt man in gleicher Weise mit der Einflußfunktion (4), so hat man

$$w_1 = \frac{P l_1^3}{\pi D} \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda \delta_1)\, J_0(\lambda x_1)\, d\lambda}{1+\lambda^4}, \tag{18}$$

wo δ_1 für c/l_1 steht. Nun läßt sich diese Lösung auch in *Schleicher*schen Funktionen darstellen[1], womit der zugehörige Biegungspfeil $w(0)$ gegeben ist. Setzt man andererseits $\delta = \delta_1$, so folgt aus (17) und (18)

$$w(0) = w_1(0) + \frac{P l^3}{\pi \delta D} \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda \delta)(1-\lambda)\, d\lambda}{\lambda(1+\lambda^3)(1+\lambda^4)}$$

mit einem rasch konvergenten rechtsstehenden Integral. Die maximale Bodenpressung ist nach (17) gegeben durch das Integral

$$q(0) = \frac{P}{\pi \delta l^2} \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda \delta)\, d\lambda}{1+\lambda^3},$$

dessen Auswertung auf S. 146 behandelt wurde. Die Biegungsmomente im Mittelpunkt des Lastkreises sind nun

$$m_r(0) = m_t(0) = -\frac{D(1+\nu)}{2} \Delta w(0) = \frac{P(1+\nu)}{2\pi\delta} \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda\delta)\lambda\, d\lambda}{1+\lambda^3}.$$

Schreibt man das vorstehende Integral um in der Form

$$I_m = \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda\delta)\lambda^2\, d\lambda}{(1+\lambda^2)^2} + \int_0^6 \frac{J_1(\lambda\delta)(2\lambda^3-\lambda^2+\lambda)\, d\lambda}{(1+\lambda^2)^2(1+\lambda^3)} + R,$$

so läßt sich das erste Glied zur rechten Hand sofort auf tabulierte *Hankel*sche Funktionen

$$\frac{\delta K_0(\delta)}{2} - \frac{\pi i}{4} H_0^{(1)}(i\delta)$$

zurückführen[2]. Beschränkt man sich dann auf die Ausrechnung des zweiten Gliedes, so gilt für den Rest

$$|R| < 2 J_1(\lambda'\delta) \int_6^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4} = \frac{|J_1(\lambda'\delta)|}{324}.$$

Unter $J_1(\lambda'\delta)$ ist dabei der zahlenmäßig größte Wert der *Bessel*schen Funktion des Argumentes $\lambda'\delta > 6\delta$ bei gegebenem δ zu verstehen. Für $\delta = 0{,}2$ ist z. B. $|R| < 0{,}0015$.

In Tabelle 2 sind die Einsenkungen, Bodenpressungen und Momente in $x=0$ sowie der Scherkräfte an der Grenze des Lastkreises $x=\delta$ zusammengestellt.

Tabelle 2.

$\delta = c/l$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	Faktor
$w(0)$	0,192	0,190	0,185	0,179	0,172	0,164	0,156	0,149	0,143	0,135	0,128	Pl^2/D
$q(0)$	0,192	0,172	0,154	0,137	0,122	0,109	0,098	0,087	0,077	0,069	0,061	P/l^2
$m_r(0) = m_t(0)$	∞	0,177	0,124	0,093	0,073	0,058	0,047	0,038	0,031	0,026	0,021	$(1+\nu)P$
$s_r(\delta)$	∞	0,779	0,369	0,229	0,157	0,114	0,086	0,066	0,052	0,042	0,034	P/l

Bei kleinen Werten δ wird man die Maximalmomente mit Vorteil in logarithmischer Form darstellen. Darf nämlich der auf die Lastkreisfläche entfallende Anteil der Bodenreaktion gegen die Gesamtauflast P vernachlässigt werden, so ist das fragliche Maximalmoment um den Wert $P/4\pi$ größer als das durch die zentrische Punktlast D erzeugte radiale Moment am Rande des Kreises[3]. Aus (14) folgt unmittelbar

$$m_r(0) = m_t(0) = -\frac{P(1+\nu)}{4\pi} \ln \frac{\gamma\delta}{2} + \frac{P(1+\nu)}{8\pi} = \frac{P(1+\nu)}{4\pi}\left(\ln \frac{l}{c} + 0{,}616\right). \tag{19}$$

Für $\delta = 0{,}2$ bzw. 0,4 liefert die Formel (19) Werte $m(0) = 0{,}177$ bzw. 0,122 in guter Übereinstimmung mit der Tabelle 2.

[1] *F. Schleicher*, a. a. O. S. 82.
[2] *G. N. Watson*, a. a. O. S. 434.
[3] *A. Nádai*, Elastische Platten, S. 65. Berlin 1925.

5. Einflußfunktion für beliebige Belastung. Zur Erfassung einer beliebig verteilten Belastung ist es zweckmäßig, die Einflußfunktionen (2) bzw. (3) umzuformen. Bedient man sich auch weiterhin der Polarkoordinaten, so erzeugt eine Einzellast $P=1$ in (ϱ, ψ) eine Einsenkung an der Stelle (r, φ)

$$W(x, \varphi, \xi, \psi) = \frac{l^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0\left\{\lambda\left[x^2 - 2x\xi\cos(\varphi-\psi) + \xi^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} d\lambda}{1+\lambda^3}, \tag{20}$$

worin wiederum x für r/l und ξ für ϱ/l steht. Einem bekannten Additionstheorem[1] zufolge kann man den vorstehenden Ausdruck in die Reihe

$$W(x, \varphi, \xi, \psi) = \frac{l^2}{2\pi D} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\cos n(\varphi-\psi) \int_0^\infty \frac{J_n(\lambda x) J_{-n}(\lambda \xi)\, d\lambda}{1+\lambda^3}\right]$$

entwickeln. Läßt sich die Lastfunktion ebenfalls auf die Form

$$p(\xi, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} P_n(\xi) \cos n\psi$$

bringen, wobei $P_n(\xi)$ eine Funktion von ξ allein bezeichnen soll, so wird die Bestimmung von

$$w(x, \varphi) = \frac{l^2}{2\pi D} \int_F W(x, \varphi, \xi, \psi)\, p(\xi, \psi)\, l^2 \xi\, d\lambda\, d\psi,$$

wo F die Lastfläche bedeutet, auf Quadraturen in der Variablen ξ zurückgeführt. Im Falle von mehreren Einzellasten tritt an Stelle des Integrals eine Summe. Auf Sonderfälle wollen wir im Rahmen dieser Arbeit nicht eingehen.

(Eingegangen am 21. April 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Sergius Woinowsky-Krieger*, (16) Frankfurt/M., Baseler Platz 6.

---

[1] Vgl. etwa *R. Courant- D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, S. 424, 2. Aufl., Berlin 1931.

Beitrag zur allgemeinen Schalenbiegetheorie.

Von W. Zerna.

1. Einleitung. Bei verwickelteren Problemen der biegesteifen Schalen bereitet die übliche anschauliche Ableitung der Theorie teilweise erhebliche Schwierigkeiten, so daß es wünschenswert erscheint, eine allgemeine Schalenbiegetheorie zu besitzen, die es gestattet, alle erforderlichen Gleichungen und Beziehungen auf rein formalem Wege zu gewinnen.

Bisher sind Arbeiten von *Love*[1], *Trefftz*[2], *Reutter*[3], *Fadle*[4] und *Deuker*[5] bekannt geworden, welche die Gleichgewichtsbedingungen und zum Teil auch das vollständige System der Differentialgleichungen der allgemeinen biegesteifen Schalen aufzustellen gestatten. Die dort gefundenen Ergebnisse lassen sich aber für praktische Aufgaben nur in beschränktem Umfange verwerten, da sie entweder nur Teilprobleme behandeln oder nicht immer erträgliche Voraussetzungen bzw. Vernachlässigungen enthalten oder schließlich bei ihren Anwendungen allzu umfangreiche und undurchsichtige Rechnungen notwendig machen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die Grundlagen der allgemeinen Schalentheorie neu entwickelt und weitreichende Beziehungen aufgestellt werden, die es ermöglichen, in verhältnismäßig einfacher Weise alle für die Behandlung eines speziellen Problems erforderlichen Gleichungen zu erhalten. Dabei ergibt sich dann weiterhin der Vorteil, durch Einführung verschiedener Koordinatensysteme die für die Lösung zweckmäßigste Form der Gleichungen herausfinden zu können.

Für die Herleitungen sollen die Vektor- und Tensorrechnung sowie die Methoden und Ergebnisse der Differentialgeometrie herangezogen werden. Für die Schreibweise der diesbezüglichen Formeln werde verabredet, daß lateinische Buchstaben als Indizes stets die Zahlen 1 und 2 durchlaufen, und daß nach der bekannten Regel über doppelt auftretende gleiche Indizes summiert wird, ohne daß Summenzeichen ausdrücklich hingeschrieben werden, wenn nicht Ausnahmen besonders gekennzeichnet sind. Es bedeutet also beispielsweise

$$\frac{\partial A^l}{\partial \vartheta_l} = \frac{\partial A^1}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial A^2}{\partial \vartheta_2},$$

$$a^m b_m = a^1 b_1 + a^2 b_2,$$

$$a^i_l b^{lm} c^k_m = a^i_1 (b^{11} c^k_1 + b^{12} c^k_2) + a^i_2 (b^{21} c^k_1 + b^{22} c^k_2) \; (i, k = 1, 2),$$

wobei natürlich obenstehende Indizes nicht mit Potenzen zu verwechseln sind. Sofern dies zu befürchten ist, sollen die Exponenten durch Fettdruck hervorgehoben werden.

2. Zur Geometrie der Schalen[6]. Eine Schale ist in geometrischer Hinsicht bestimmt durch ihre Mittelfläche und ihre Dicke h in jedem Punkt. Die Schalenmittelfläche möge durch die von zwei Parametern ϑ_i $(i=1, 2)$ abhängige Vektorgleichung ihres Ortsvektors

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\vartheta_i) \tag{1}$$

gegeben sein. Die beiden Kurvenscharen ϑ_i = konst. werden als Parameterlinien bezeichnet und bilden ein die Fläche überdeckendes krummliniges, im allgemeinen schiefwinkliges Koordinaten-

---

[1] *A. E. H. Love*, A Treatise on the Mathematical Theorie of Elasticity, 4. Aufl. Cambridge 1927. — *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von *A. Timpe*. Leipzig und Berlin 1907. (Übersetzung der 2. Aufl.)

[2] *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935), S. 101.

[3] *F. Reutter*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 87.

[4] *J. Fadle*, Ing.-Arch. 14 (1944), S. 413.

[5] *E. A. Deuker*, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 81. Während der Drucklegung erhielt ich Kenntnis von zwei weiteren Arbeiten, nämlich von *E. Reissner*, Amer. J. Math. 63 (1941), S. 177, und *J. L. Synge and W. Z. Chien*, Theodore von Kármán Anniversary Volume (1941), S. 103, in denen aber andere Wege als in der vorliegenden Arbeit beschritten werden.

[6] Bezüglich der differentialgeometrischen Grundlagen vgl. *A. Duschek* und *W. Mayer*, Lehrbuch der Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1930, und *M. Lagally*, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1934.

netz. Mit ϑ_3 sei der Abstand eines Punktes von der Mittelfläche bezeichnet; ϑ_3 läuft demgemäß im Intervall von $-h/2$ bis $+h/2$. Die die Schale begrenzenden Flächen, für welche $\vartheta_3 = \pm h/2$ ist, heißen ihre Laibungen.

Ist $\mathfrak{e}_3$ der Normalenvektor der Mittelfläche, so läßt sich der Ortsvektor $\mathfrak{R}$ eines beliebigen Schalenpunktes durch

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}(\vartheta_i) + \vartheta_3 \mathfrak{e}_3(\vartheta_i) \tag{2}$$

ausdrücken (Abb. 1). Der Ausdruck (2) ist die vektorielle Darstellung einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten ϑ_i, ϑ_3. Ihre metrischen Fundamentalgrößen m_{ik} errechnen sich aus

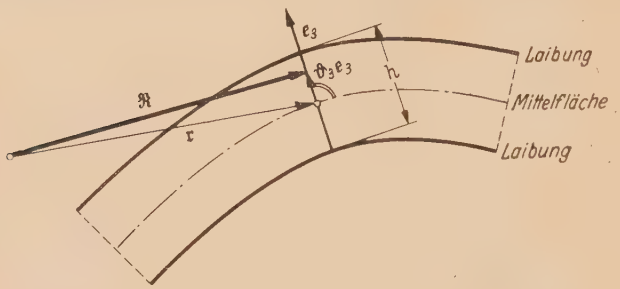


Abb. 1. Schnitt senkrecht zur Schalenmittelfläche.

$$\left.\begin{aligned} m_{ik} &= g_{ik} - 2\,\vartheta_3\, b_{ik} + \vartheta_3^2\, c_{ik}\,, \\ m_{i3} &= 0\,, \\ m_{33} &= 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die g_{ik} sind darin die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Mittelfläche, die kovarianten Maßzahlen des Maßtensors. Die b_{ik} sind die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform, die kovarianten Maßzahlen des Krümmungstensors; und die c_{ik} sind die Koeffizienten der dritten Fundamentalform der Mittelfläche.

Werden mit

$$\mathfrak{e}_i = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \vartheta_i} \tag{4}$$

die kovarianten Basisvektoren der Mittelfläche bezeichnet, so gilt

$$g_{ik} = \mathfrak{e}_i\, \mathfrak{e}_k\,. \tag{5}$$

Die kovarianten Maßzahlen des Krümmungstensors bestimmen sich aus

$$b_{ik} = -\mathfrak{e}_i \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial \vartheta_k} = \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \vartheta_k}\, \mathfrak{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \vartheta_k}\, \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2\right], \tag{6}$$

worin

$$\mathfrak{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial \vartheta_k} = -\, b_k^l\, \mathfrak{e}_l \tag{7}$$

und

$$g = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2 > 0 \tag{8}$$

zu setzen ist.

Die kovarianten Maßzahlen b_{ik}, die kontravarianten Maßzahlen b^{ik} und die gemischten Maßzahlen b_k^i des Krümmungstensors sind durch folgende Beziehungen verknüpft:

$$\left.\begin{aligned} b^{ik} &= b_l^k\, g^{il}\,, \\ b_k^i &= b^{il}\, g_{kl} = b_{lk}\, g^{il}\,, \\ b_{ik} &= b_i^l\, g_{kl}\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

worin die g^{ik} die kontravarianten Maßzahlen des Maßtensors der Mittelfläche sind; sie ermitteln sich aus

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}\,, \quad g_{12} = -\frac{g_{12}}{g}\,, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}\,. \tag{10}$$

Für die Koeffizienten der dritten Fundamentalform, die sich durch die kovarianten und gemischten Maßzahlen des Krümmungstensors ausdrücken lassen, gilt

$$c_{ik} = \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial \vartheta_i}\, \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial \vartheta_k} = b_{il}\, b_k^l\,. \tag{11}$$

Zwischen den kovarianten Basisvektoren $\mathfrak{e}_i$ und den kontravarianten Basisvektoren $\mathfrak{e}^i$ der Mittelfläche bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}^k &= g^{ik}\, \mathfrak{e}_i\,, \\ \mathfrak{e}_k &= g_{ik}\, \mathfrak{e}^i\,, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}_i\, \mathfrak{e}^k &= 0 \quad (i \neq k)\,, \\ \mathfrak{e}_i\, \mathfrak{e}^i &= 1 \quad (\text{nicht über } i \text{ summieren!})\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Mit $d\vartheta^i$, $d\vartheta^3$ seien die Koordinatendifferentiale bezeichnet, dann ist das Quadrat des Abstandes zweier Schalenpunkte mit den Koordinaten ϑ_i, ϑ_3 bzw. $\vartheta_i + d\vartheta^i$, $\vartheta_3 + d\vartheta^3$ gegeben durch das Bogenelement

$$dS^2 = d\mathfrak{R}\, d\mathfrak{R} = m_{ik}\, d\vartheta^i\, d\vartheta^k + (d\vartheta^3)^2 . \tag{14}$$

Ist ϑ_3 konst., so beschreibt $\mathfrak{R}$ eine Fläche, auf der zwei Paare benachbarter Parameterlinien, auf denen ϑ_i und $\vartheta_i + d\vartheta^i$ konstant sind, ein Flächenelement bilden, dessen Flächeninhalt sich zu

$$dF = \sqrt{m}\; d\vartheta^1\, d\vartheta^2 \tag{15}$$

ergibt. Darin ist

$$\sqrt{m} = \left| \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vartheta_1} \times \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vartheta_2} \right| = \sqrt{g}\,(1 - 2\,\vartheta_3\, H + \vartheta_3^2\, K) . \tag{16}$$

Es bedeutet in (16)

$$H = \tfrac{1}{2}\, b_i^i \tag{17}$$

die mittlere Krümmung und

$$K = b_1^1\, b_2^2 - b_2^1\, b_1^2 \tag{18}$$

das *Gauß*sche Krümmungsmaß der Mittelfläche. Wird abkürzend gesetzt

$$m^* = 1 - 2\,\vartheta_3\, H + \vartheta_3^2\, K , \tag{19}$$

so schreibt sich (16)

$$\sqrt{m} = m^*\, \sqrt{g} . \tag{20}$$

Die kontravarianten Maßzahlen m^{ik} des Maßtensors errechnen sich aus

$$m^{11} = \frac{m_{22}}{m} , \quad m^{12} = -\frac{m_{12}}{m} , \quad m^{22} = \frac{m_{11}}{m} .$$

Diese Ausdrücke werden in Potenzreihen nach ϑ_3 entwickelt, die wegen der vorausgesetzten geringen Schalenstärke nach den quadratischen Gliedern abgebrochen werden. Auch im folgenden werden grundsätzlich stets alle Glieder bis zu den in ϑ_3 quadratischen berücksichtigt. Für die kontravarianten Maßzahlen des Maßtensors ergibt sich dann

$$m^{ik} = g^{ik} + 2\,\vartheta_3\, b^{ik} + 3\,\vartheta_3^2\, b^{il}\, b_l^k . \tag{21}$$

Weiterhin ist

$$m^{3i} = 0 , \quad m^{33} = 1 ,$$

was im folgenden jedoch nicht weiter in Erscheinung tritt.

3. Der Spannungszustand. Es seien s_k^i, s_3^i, s_k^3, s_3^3 $(i, k = 1,2)$ die gemischten Maßzahlen des symmetrischen Spannungstensors, bezogen auf das Koordinatensystem der ϑ_i, ϑ_3. Ferner seien $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_3$ die drei Spannungsvektoren auf den drei Koordinatenflächen $\vartheta_i =$ konst. und $\vartheta_3 =$ konst. Werden sie ganz auf die Basis $\mathfrak{e}^i$, $\mathfrak{e}_3$ bezogen, so lassen sie sich nach einigen, hier übergangenen Rechnungen in die Komponentendarstellung bringen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_i &= \frac{1}{\sqrt{m^{ii}}}\,(\sigma_k^i\, \mathfrak{e}^k + s_3^i\, \mathfrak{e}_3) \quad \text{(nicht über } i \text{ summieren!)} \\ \mathfrak{p}_3 &= \sigma_k^3\, \mathfrak{e}^k + s_3^3\, \mathfrak{e}_3 , \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

worin die Spannungsgrößen σ_k^i, σ_k^3 wie folgt definiert sind:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k^i &= s_k^i + \vartheta_3\, s_l^i\, b_k^l + \vartheta_3^2\, s_l^i\, b_m^l\, b_k^m , \\ \sigma_k^3 &= s_k^3 + \vartheta_3\, s_l^3\, b_k^l + \vartheta_3^2\, s_l^3\, b_m^l\, b_k^m . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die in einem Schnitt senkrecht zur Schalenmittelfläche wirkenden Spannungen sollen über die Schalenstärke h integriert und zu einer auf die Längeneinheit der Schnittlinie mit der Mittelfläche bezogenen Resultierenden zusammengefaßt werden.

Diese Resultierende wird dann in eine Kraft mit dem Angriffspunkt in der Mittelfläche und einem Moment zerlegt. Es ergibt sich für die in einem Schnitt $\vartheta_1 =$ konst. wirkende resultierende

Kraft $\mathfrak{N}_1$ und das resultierende Moment $\mathfrak{M}_1$ die Darstellung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathfrak{p}_1 \sqrt{m_{22}}\, d\vartheta^3 , \\ \mathfrak{M}_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{p}_1 \vartheta_3 \sqrt{m_{22}}\, d\vartheta^3 . \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

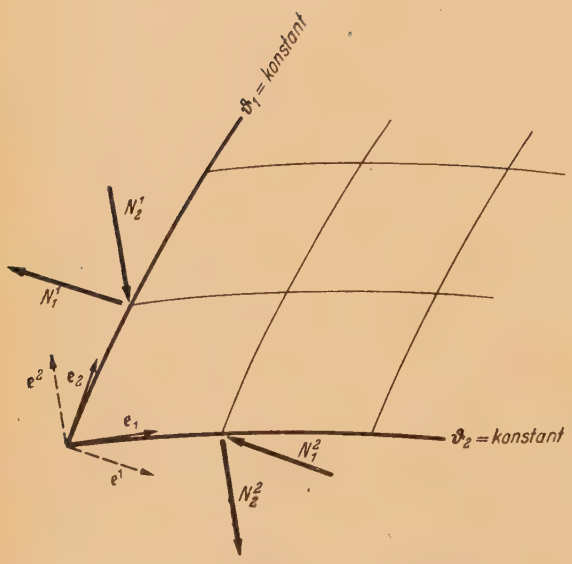


Abb. 2a. Gemischte Maßzahlen des Längskrafttensors.

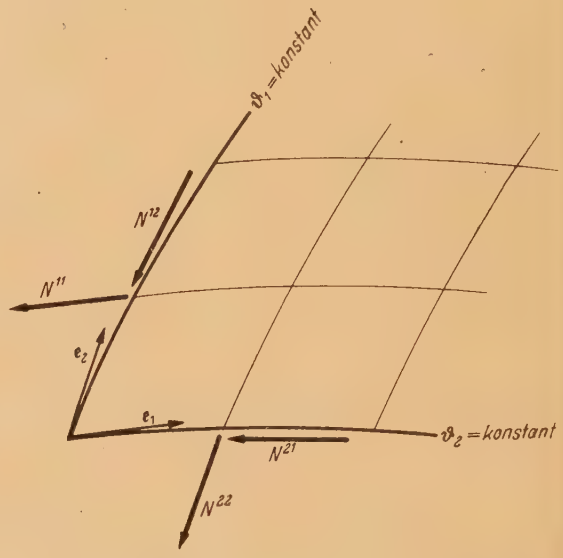


Abb. 2b. Kontravariante Maßzahlen des Längskrafttensors.

Entsprechend gilt für einen Schnitt ϑ_2 = konst.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathfrak{p}_2 \sqrt{m_{11}}\, d\vartheta^3 , \\ \mathfrak{M}_2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{p}_2 \vartheta_3 \sqrt{m_{11}}\, d\vartheta^3 . \end{aligned}\right\} \tag{24b}$$

Berücksichtigung von (22) führt mit Beachtung von (19) zur Definition folgender Schnittgrößen:

$$\left.\begin{aligned} N_k^i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} m^* \sigma_k^i\, d\vartheta^3 , \\ M^{i1} &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} m^* \vartheta_3 \sigma_2^i\, d\vartheta^3 , \\ M^{i2} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} m^* \vartheta_3 \sigma_1^i\, d\vartheta^3 , \\ Q^i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} m^* s_3^i\, d\vartheta^3 . \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Mit (25) wird bei Beachtung von (10), (20) und (22) aus (24)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_i &= \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\,(N_l^i\,\mathrm{e}^l + Q^i\,\mathrm{e}_3)\,, \\ \mathfrak{M}_i &= \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\,M^{il}\,\mathrm{e}_l \end{aligned}\right\}\ \text{(nicht über } i \text{ summieren!)}\,. \tag{26}$$

Die Bedeutung der in (25) definierten Größen wird aus (26) klar, sie sind in Abb. 2a und 2c veranschaulicht.

Die N_k^i sind die Längskräfte, sie sind parallel zu den kontravarianten Basisvektoren e^i und bilden die gemischten Maßzahlen eines Tensors, des Längskrafttensors, der im allgemeinen nicht symmetrisch ist. Im Falle sich rechtwinklig schneidender Parameterlinien nehmen N_2^1 und N_1^2 die Richtungen der Schubkräfte an.

Die M^{ik} stellen die Momente dar, die Richtungen ihrer Vektoren verlaufen parallel zu den kovarianten Basisvektoren e_i. Sie bilden die kontravarianten Maßzahlen eines Tensors, des Momententensors, der wie der Längskrafttensor im allgemeinen nicht symmetrisch ist, so daß

$$M^{12} \neq M^{21}\,.$$

Ist das Netz der Parameterlinien orthogonal, so sind M^{12} und M^{21} die üblichen Biegemomente und M^{11}, M^{22} die Drillungsmomente.

Die Größen Q^i sind die Querkräfte, sie stehen senkrecht auf der Schalenmittelfläche und können als kontravariante Maßzahlen eines Vektors gedeutet werden.

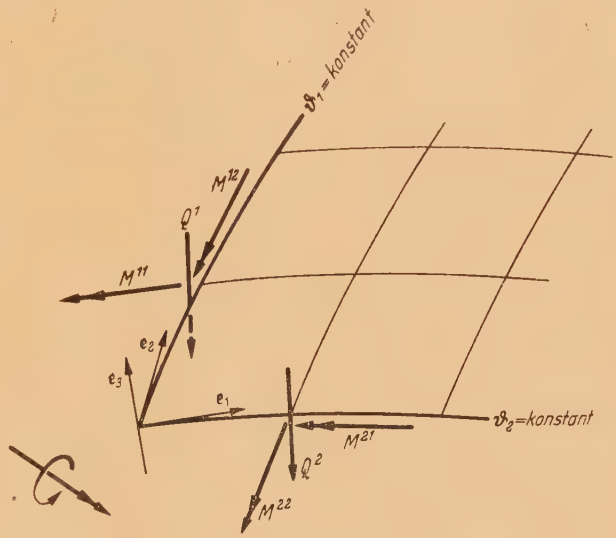


Abb. 2c. Kontravariante Maßzahlen des Momententensors und Querkräfte.

Es bereitet nun natürlich keine Schwierigkeiten, die kontravarianten Maßzahlen N^{ik} des Längskrafttensors zu bestimmen, es gilt nämlich

$$N^{ik} = N_l^i\,g^{lk}\,. \tag{27}$$

Ihre Richtungen verlaufen parallel zu den kovarianten Basisvektoren, wie es Abb. 2b zeigt. Wegen der Unsymmetrie des Längskrafttensors ist im allgemeinen

$$N^{12} \neq N^{21}\,.$$

An Stelle des ersten Ausdruckes (26) tritt mit (27)

$$\mathfrak{N}_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\,(N^{il}\,\mathrm{e}_l + Q^i\,\mathrm{e}_3)\quad \text{(nicht über } i \text{ summieren!)}\,. \tag{28}$$

Die kovarianten Maßzahlen des Längskrafttensors sowie die gemischten und kovarianten Maßzahlen des Momententensors lassen sich auf entsprechende Weise bestimmen, doch kommt ihnen hier keine Bedeutung zu, so daß darauf nicht näher eingegangen werden soll.

4. Das Gleichgewicht am Schalenelement. Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, die auf die Längen $|\mathrm{e}_1| = \sqrt{g_{11}}$ und $|\mathrm{e}_2| = \sqrt{g_{22}}$ entfallenden Schnittgrößen einzuführen. Sie mögen wie folgt bezeichnet werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &= \mathfrak{N}_1\sqrt{g_{22}}\,, & \mathfrak{K}_2 &= \mathfrak{N}_2\sqrt{g_{11}}\,, \\ \mathfrak{L}_1 &= \mathfrak{M}_1\sqrt{g_{22}}\,, & \mathfrak{L}_2 &= \mathfrak{M}_2\sqrt{g_{11}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die auf die Länge der Linienelemente

$$ds_1 = |\mathfrak{e}_1|\, d\vartheta^1 = \sqrt{g_{11}}\, d\vartheta^1,$$
$$ds_2 = |\mathfrak{e}_2|\, d\vartheta^2 = \sqrt{g_{22}}\, d\vartheta^2$$

entfallenden Schnittgrößen lassen sich mit (29) unter Beachtung von (10) und (26) in nachstehender Weise ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{N}_1 ds_2 &= \frac{\mathfrak{K}_1}{\sqrt{g_{22}}}\, ds_2 = \mathfrak{K}_1\, d\vartheta^2 = \sqrt{g}\,(N_l^1\, \mathfrak{e}^l + Q^1 \mathfrak{e}_3)\, d\vartheta^2,\\
\mathfrak{N}_2 ds_1 &= \frac{\mathfrak{K}_2}{\sqrt{g_{11}}}\, ds_1 = \mathfrak{K}_2\, d\vartheta^1 = \sqrt{g}\,(N_l^2\, \mathfrak{e}^l + Q^2 \mathfrak{e}_3)\, d\vartheta^1,\\
\mathfrak{M}_1 ds_2 &= \frac{\mathfrak{L}_1}{\sqrt{g_{22}}}\, ds_2 = \mathfrak{L}_1\, d\vartheta^2 = \sqrt{g}\, M^{1l} \mathfrak{e}_l\, d\vartheta^2,\\
\mathfrak{M}_2 ds_1 &= \frac{\mathfrak{L}_2}{\sqrt{g_{11}}}\, ds_1 = \mathfrak{L}_2\, d\vartheta^1 = \sqrt{g}\, M^{2l} \mathfrak{e}_l\, d\vartheta^1.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Wird der Längskraftvektor in der Gestalt (28) verwendet, so tritt an Stelle der beiden ersten Gleichungen (30)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{N}_1 ds_1 &= \sqrt{g}\,(N^{1l} \mathfrak{e}_l + Q^1 \mathfrak{e}_3)\, d\vartheta^2,\\
\mathfrak{N}_2 ds_2 &= \sqrt{g}\,(N^{2l} \mathfrak{e}_l + Q^2 \mathfrak{e}_3)\, d\vartheta^1.
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Mit Einführung der Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}
\bar{N}_k^i &= \sqrt{g}\, N_k^i, & \bar{N}^{ik} &= \sqrt{g}\, N^{ik},\\
\bar{Q}^i &= \sqrt{g}\, Q^i, & \bar{M}^{ik} &= \sqrt{g}\, M^{ik},
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

die reduzierte Schnittgrößen heißen sollen, folgt aus (30) bzw. (31)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{K}_i &= \bar{N}_l^i\, \mathfrak{e}^l + \bar{Q}^i \mathfrak{e}_3\\
&= \bar{N}^{il} \mathfrak{e}_l + \bar{Q}^i \mathfrak{e}_3,\\
\mathfrak{L}_i &= \bar{M}^{il} \mathfrak{e}_l.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Für die auf die Längeneinheit bezogenen Schnittgrößen, die durch $\overset{(0)}{N}{}_k^i$, $\overset{(0)}{N}{}^{ik}$, $\overset{(0)}{M}{}^{ik}$, $\overset{(0)}{Q}{}^i$ gekennzeichnet werden sollen, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(0)}{N}{}_1^1 = N_1^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \bar{N}_1^1, && \overset{(0)}{N}{}_2^1 = \sqrt{\frac{g^{22}}{g^{11}}}\, N_2^1 = \sqrt{\frac{g^{22}}{g_{22}}}\, \bar{N}_2^1\\
&\overset{(0)}{N}{}_2^2 = N_2^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \bar{N}_2^2, && \overset{(0)}{N}{}_1^2 = \sqrt{\frac{g^{11}}{g^{22}}}\, N_1^2 = \sqrt{\frac{g^{11}}{g_{11}}}\, \bar{N}_1^2,\\
&\overset{(0)}{N}{}^{11} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g^{11}}}\, N^{11} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\, \bar{N}^{11}, && \overset{(0)}{N}{}^{12} = \sqrt{g}\, N^{12} = \bar{N}^{12},\\
&\overset{(0)}{N}{}^{22} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g^{22}}}\, N^{22} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\, \bar{N}^{22}, && \overset{(0)}{N}{}^{21} = \sqrt{g}\, N^{21} = \bar{N}^{21},\\
&\overset{(0)}{M}{}^{11} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g^{11}}}\, M^{11} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\, \bar{M}^{11}, && \overset{(0)}{M}{}^{12} = \sqrt{g}\, M^{12} = \bar{M}^{12},\\
&\overset{(0)}{M}{}^{22} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g^{22}}}\, M^{22} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\, \bar{M}^{22}, && \overset{(0)}{M}{}^{21} = \sqrt{g}\, M^{21} = \bar{M}^{21},\\
&\overset{(0)}{Q}{}^1 = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}\, Q^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\, \bar{Q}^1, && \overset{(0)}{Q}{}^2 = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}}\, Q^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\, \bar{Q}^2.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Werden längs der vier Seiten eines Flächenelementes der Schalenmittelfläche die Flächennormalen errichtet, so begrenzen sie zusammen mit den Schalenlaibungen einen Körper, der

Schalenelement genannt wird. Die auf seinen Begrenzungsflächen wirkenden Spannungen lassen sich in der angegebenen Weise gemäß (24) zu resultierenden Schnittgrößen zusammenfassen.

Die auf die Flächeneinheit der Schalenmittelfläche bezogene äußere Belastung sei durch den Belastungsvektor $\mathfrak{p}$ gegeben. Auf das Schalenelement entfällt dann die Belastung

$$\mathfrak{P}\, d\vartheta^1\, d\vartheta^2 = \mathfrak{p} \sqrt{g}\; d\vartheta^1\, d\vartheta^2 . \tag{35}$$

Nunmehr sind alle am Schalenelement angreifenden Kräfte und Momente erfaßt. Sie sind in Abb. 3 durch ihre Vektoren dargestellt, wobei die durch die Parameteränderungen bedingten Änderungen der Schnittgrößen berücksichtigt sind.

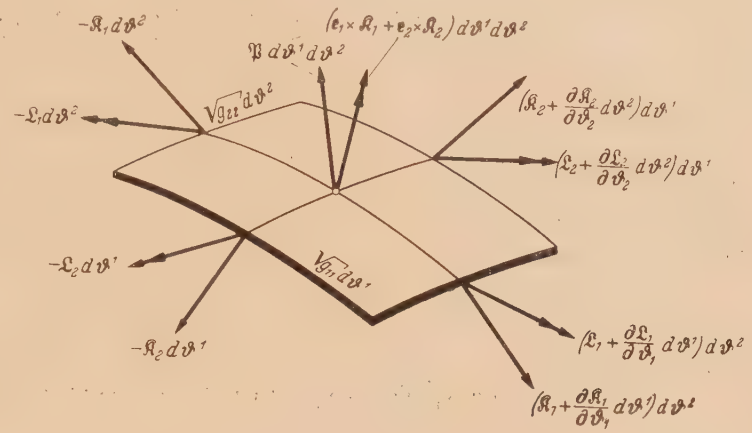


Abb. 3. Schalenelement mit angreifenden Kräften und Momenten.

Das Gleichgewicht am Schalenelement verlangt, daß die vektorielle Summe der angreifenden Kräfte und alle Momente bezüglich eines beliebigen Punktes verschwinden. Die erste Bedingung führt auf die aus Abb. 3 unmittelbar zu entnehmende Vektorgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{K}_1}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial \mathfrak{K}_2}{\partial \vartheta_2} + \mathfrak{P} = 0 . \tag{36a}$$

Wird als Bezugspunkt für das Momentengleichgewicht der Schwerpunkt des Schalenelementes gewählt und werden von höherer Ordnung kleine Größen vernachlässigt, so liefert die zweite Bedingung die aus Abb. 3 ablesbare Vektorgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \vartheta_2} + \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{K}_2 = 0 . \tag{36b}$$

Werden die in (36b) auftretenden Vektorprodukte unter Beachtung von (33) und (27) berechnet, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{K}_1 &= \sqrt{g}\; (\overline{N}^{12}\, \mathfrak{e}_3 - \overline{Q}^1\, \mathfrak{e}^2), \\ \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{K}_2 &= \sqrt{g}\; (-\overline{N}^{21}\, \mathfrak{e}_3 + \overline{Q}^2\, \mathfrak{e}^1). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Mit (37) nimmt (36b) die Form an

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \vartheta_2} + \sqrt{g}\, \left\{ \mathfrak{e}_3 (\overline{N}^{12} - \overline{N}^{21}) + \overline{Q}^2\, \mathfrak{e}^1 - \overline{Q}^1\, \mathfrak{e}^2 \right\} = 0 . \tag{38}$$

Werden jetzt in (36a) und (38) die Ausdrücke (33) und (35) eingeführt und die Differentiationen ausgeführt, so ergeben sich die beiden nachstehenden vektoriellen Differentialgleichungen, die das Gleichgewicht am Schalenelement vollständig beschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}^i \frac{\partial \overline{N}^l_i}{\partial \vartheta_l} + \frac{\partial \mathfrak{e}^k}{\partial \vartheta_i} \overline{N}^i_k + \mathfrak{e}_3 \frac{\partial \overline{Q}^l}{\partial \vartheta_l} + \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial \vartheta_i} \overline{Q}^i + \mathfrak{p} \sqrt{g} &= 0 , \\ \mathfrak{e}_i \frac{\partial \overline{M}^{li}}{\partial \vartheta_l} + \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \vartheta_k} \overline{M}^{ik} + \sqrt{g}\, \left\{ \mathfrak{e}_3 (\overline{N}^{12} - \overline{N}^{21}) + \overline{Q}^2\, \mathfrak{e}^1 - \overline{Q}^1\, \mathfrak{e}^2 \right\} &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{39a}$$

Mit den kontravarianten Maßzahlen des Längskrafttensors nimmt die erste Gleichung (39a) unter Beachtung von (33) die Gestalt

$$\mathfrak{e}_i \frac{\partial \overline{N}^{li}}{\partial \vartheta_l} + \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \vartheta_k} \overline{N}^{ik} + \mathfrak{e}_3 \frac{\partial \overline{Q}^l}{\partial \vartheta_l} + \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial \vartheta_i} \overline{Q}^i + \mathfrak{p} \sqrt{g} = 0 \tag{39b}$$

an.

Verschwinden alle M^{ik} und Q^i, so folgt aus (39) sofort die den Membranspannungszustand beschreibende Gleichgewichtsbedingung

$$\left.\begin{aligned} & \mathfrak{e}^i \frac{\partial \overline{N}_i^l}{\partial \vartheta_l} + \frac{\partial \mathfrak{e}^k}{\partial \vartheta_i} \overline{N}_k^i + \mathfrak{p} \sqrt{g} = 0 \\ \text{oder auch in der Form} \quad & \mathfrak{e}_i \frac{\partial \overline{N}^{li}}{\partial \vartheta_l} + \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \vartheta_k} \overline{N}^{ik} + \mathfrak{p} \sqrt{g} = 0 , \\ \text{mit} \quad & \overline{N}^{12} = \overline{N}^{21} . \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

5. Der Formänderungszustand. Durch Einwirkung äußerer Kräfte erfahren die Punkte der Schale Verschiebungen, deren Größe von den Spannungen und dem Werkstoff der Schale abhängt. Für die weitere Rechnung wird in Übereinstimmung mit den bei dünnen Schalen üblichen Annahmen vorausgesetzt, daß

1) die Normalen zur unverformten Mittelfläche auch nach der Verformung zur neuen Mittelfläche normal sind;
2) die Spannungskomponente s_3^3 überall so klein im Vergleich zu den anderen ist, daß ihr Einfluß auf die Formänderungen vernachlässigt werden kann.

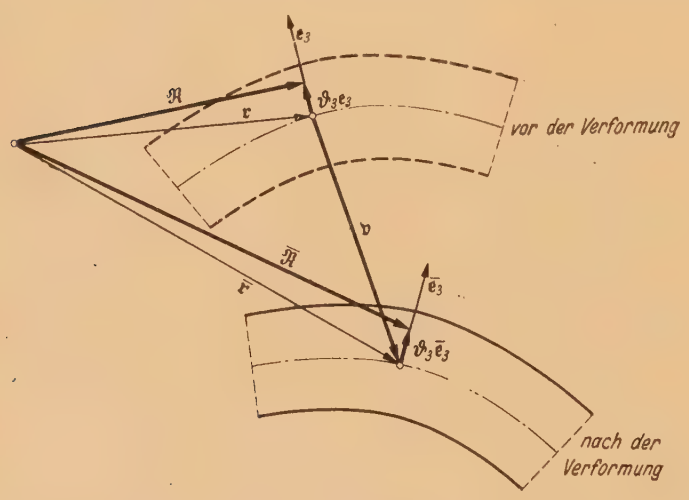


Abb. 4. Schnitt senkrecht zur Schalenmittelfläche vor der Verformung und nach der Verformung.

Für die verformte Schale möge der Ortsvektor der Mittelfläche mit $\overline{\mathfrak{r}}$, die Schalennormale mit $\overline{\mathfrak{e}}_3$ und der Ortsvektor eines beliebigen Punktes mit $\overline{\mathfrak{R}}$ bezeichnet werden. Gemäß Abb. 4 kann dann geschrieben werden, wenn die bei der Verformung auftretende Änderung von ϑ_3 als von höherer Ordnung klein vernachlässigt wird:

$$\overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{r}} + \vartheta_3 \overline{\mathfrak{e}}_3 . \tag{41}$$

Der Verschiebungsvektor, der den bei der Verformung zurückgelegten Weg eines Punktes der Schalenmittelfläche angibt, sei $\mathfrak{v}$. Es gilt somit

$$\overline{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + \mathfrak{v} . \tag{42}$$

Die Maßzahlen $\overline{m}_{ik}$ der ersten Fundamentalform der verformten Schale ergeben sich analog zu (3):

$$\left.\begin{aligned} & \overline{m}_{ik} = \overline{g}_{ik} - 2\vartheta_3 \overline{b}_{ik} + \vartheta_3^2 \overline{c}_{ik} , \\ & \overline{m}_{i3} = 0, \quad \overline{m}_{33} = 1 , \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

worin $\overline{g}_{ik}$, $\overline{b}_{ik}$, $\overline{c}_{ik}$ die Maßzahlen der ersten, zweiten und dritten Fundamentalform der verformten Schalenmittelfläche bezeichnen.

Sinngemäße Anwendung von (5) liefert mit (42) für die Maßzahlen der ersten Fundamentalform der verformten Mittelfläche, wenn, wie in der klassischen Elastizitätstheorie üblich, Größen von der zweiten oder höheren Ordnung des Verschiebungsvektors gegen solche erster Ordnung vernachlässigt werden,

$$\overline{g}_{ik} = g_{ik} + \mathfrak{e}_i \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_k} + \mathfrak{e}_k \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_i} . \tag{44}$$

Weiterhin ist

$$\bar{g} = \bar{g}_{11}\,\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}^2 = g\left(1 + 2\,\mathfrak{e}^l \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\right), \tag{45}$$

woraus

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(1 - \mathfrak{e}^l \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\right) \tag{46}$$

folgt.

Der Normalenvektor $\bar{\mathfrak{e}}_3$ der verformten Schalenmittelfläche errechnet sich mit (46) und unter Einführung von

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\mathfrak{e}_1 \times \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_2} - \mathfrak{e}_2 \times \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_1}\right) - \mathfrak{e}_3\left(\mathfrak{e}^l \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\right) = -\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_k}\mathfrak{e}_3\right)\mathfrak{e}^k \tag{47}$$

zu

$$\bar{\mathfrak{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\,\bar{\mathfrak{e}}_1 \times \bar{\mathfrak{e}}_2 = \mathfrak{e}_3 + \mathfrak{w}\,. \tag{48}$$

Entsprechend (48) läßt sich schreiben

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}_3}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_i}\,. \tag{49}$$

Die Maßzahlen der zweiten Fundamentalform der verformten Mittelfläche folgen zu

$$\bar{b}_{ik} = b_{ik} - \mathfrak{e}_i \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_k} + b_k^l\,\mathfrak{e}_l \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_i}\,. \tag{50}$$

Für die Maßzahlen der dritten Fundamentalform der verformten Mittelfläche ergibt sich schließlich entsprechend (11)

$$\bar{c}_{ik} = c_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_k} - b_k^l\,\mathfrak{e}_l \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_i}\,. \tag{51}$$

Der Abstand zweier benachbarter Punkte, der vor der Verformung durch den Vektor $d\mathfrak{R}$ bestimmt ist, beträgt nach der Verformung $d\bar{\mathfrak{R}}$; er bestimmt sich aus

$$d\bar{\mathfrak{R}}^2 = \bar{m}_{ik}\,d\vartheta^i\,d\vartheta^k\,. \tag{52}$$

Der ursprüngliche Abstand $|d\mathfrak{R}| = dS$ der beiden Punkte geht in den Abstand $dS + \delta dS$ über, wenn δdS den Zuwachs angibt. Werden Glieder zweiter Ordnung in δdS vernachlässigt, so ist

$$d\bar{\mathfrak{R}}^2 = (dS + \delta dS)^2 = dS^2 + 2\,dS\,\delta dS; \tag{53}$$

daraus folgt

$$d\bar{\mathfrak{R}}^2 - d\mathfrak{R}^2 = 2\,dS\,\delta dS\,. \tag{54}$$

Mit (14) und (52) ergibt sich aus (54)

$$\frac{\delta dS}{dS} = \varepsilon_{ik}\frac{d\vartheta^i}{dS}\,\frac{d\vartheta^k}{dS}\,, \tag{55}$$

worin

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\,(\bar{m}_{ik} - m_{ik}) \tag{56}$$

die kovarianten Maßzahlen eines symmetrischen Tensors, des Verzerrungstensors, sind, die mit (3) und (43) folgende Gestalt annehmen:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\,(\bar{g}_{ik} - g_{ik}) - \vartheta_3\,(\bar{b}_{ik} - b_{ik}) + \frac{1}{2}\,\vartheta_3^2\,(\bar{c}_{ik} - c_{ik})\,. \tag{57}$$

Die später benötigten gemischten Maßzahlen ε_k^i des Verzerrungstensors erhalten, wenn wieder nach den quadratischen Gliedern von ϑ_3 abgebrochen wird, die Werte

$$\varepsilon_k^i = \varepsilon_{lk}\,m^{li} = \alpha_k^i + \vartheta_3\,\beta_k^i + \vartheta_3^2\,\gamma_k^i\,; \tag{58}$$

darin bedeuten

$$\alpha_k^i = \frac{1}{2}\left(g^{li}\,\bar{g}_{lk} - \delta_i^k\right) \qquad \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i=k \\ 0, & \text{wenn } i \neq k \end{cases}, \tag{59}$$

$$\beta_k^i = -\left(g^{li}\,\bar{b}_{lk} - b^{li}\,\bar{g}_{kl}\right), \tag{60}$$

$$\gamma_k^i = \frac{1}{2}\,g^{li}\,\bar{c}_{lk} + \frac{3}{2}\,\bar{g}_{kl}\,b^{im}\,b_m^l - 2\,b^{il}\,\bar{b}_{kl}\,. \tag{61}$$

Vermöge der Beziehungen (44), (50) und (51) lassen sich die Größen α_k^i, β_k^i, γ_k^i durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$ ausdrücken, es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_k^i &= \frac{1}{2}\left(\mathfrak{e}_k \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\, g^{il} + \mathfrak{e}^i \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_k}\right), \\
\beta_k^i &= \mathfrak{e}_k \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\, b^{li} - b_k^r\, \mathfrak{e}_r \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\, g^{li} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_k}\, b^{li}\, \mathfrak{e}_l + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_k}\, \mathfrak{e}^i, \\
\gamma_k^i &= \frac{3}{2}\left\{\mathfrak{e}_k \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\, b^{lm}\, b_m^i + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_k}\, \mathfrak{e}_l\, b^{lm}\, b_m^i\right\} - b_k^r\, \mathfrak{e}_r \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_l}\, g^{li} + 2\,\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_l}\, b^{li}\right\} + \\
&\quad + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_k}\left\{2\, b^{li}\, \mathfrak{e}_l + \frac{1}{2}\, g^{li}\, b_l^r\, \mathfrak{e}_r\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

6. Das Elastizitätsgesetz. Unter Voraussetzung eines isotropen Werkstoffes wird für die Spannungs-Verzerrungsgleichungen der Ansatz

$$\left.\begin{aligned}
s_1^1 &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^1 + \mu\,\varepsilon_2^2\right), \\
s_2^2 &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^2 + \mu\,\varepsilon_1^1\right), \\
s_2^1 &= 2\,G\,\varepsilon_2^1, \\
s_1^2 &= 2\,G\,\varepsilon_1^2
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

gewählt, worin E den Elastizitätsmodul, μ die Querkontraktionszahl, $G = E/2(1+\mu)$ den Schubmodul bedeutet.

Wird (63) in die Definitionsgleichungen der Schnittgrößen gemäß (25) eingesetzt, und werden dabei wie bisher Glieder bis zur zweiten Potenz von ϑ_3 berücksichtigt, so liefert die Integration über ϑ_3

$$\left.\begin{aligned}
N_1^1 &= D\left(\alpha_1^1 + \mu\,\alpha_2^2\right) + B\left\{\gamma_1^1 - b_2^2\,\beta_1^1 + b_1^2\,\beta_2^1 + \mu\left(\gamma_2^2 - b_2^2\,\beta_2^2 - b_1^2\,\beta_2^1\right)\right\}, \\
N_2^1 &= D\,(1-\mu)\,\alpha_2^1 + B\left\{\gamma_2^1 - b_1^1\,\beta_2^1 + b_2^1\,\beta_1^1 - \mu\left(\gamma_2^1 - b_1^1\,\beta_2^1 - b_2^1\,\beta_2^2\right)\right\}, \\
N_1^2 &= D\,(1-\mu)\,\alpha_1^2 + B\left\{\gamma_1^2 - b_2^2\,\beta_1^2 + b_1^2\,\beta_2^2 - \mu\left(\gamma_1^2 - b_2^2\,\beta_1^2 - b_1^2\,\beta_1^1\right)\right\}, \\
N_2^2 &= D\left(\alpha_2^2 + \mu\,\alpha_1^1\right) + B\left\{\gamma_2^2 - b_1^1\,\beta_2^2 + b_2^1\,\beta_1^2 + \mu\left(\gamma_1^1 - b_1^1\,\beta_1^1 - b_2^1\,\beta_1^2\right)\right\}, \\
\sqrt{g}\,M^{11} &= -B\left\{\beta_2^1 - b_1^1\,\alpha_2^1 + b_2^1\,\alpha_1^1 - \mu\left(\beta_2^1 - b_1^1\,\alpha_2^1 - b_2^1\,\alpha_2^2\right)\right\}, \\
\sqrt{g}\,M^{12} &= B\left\{\beta_1^1 - b_2^2\,\alpha_1^1 + b_1^2\,\alpha_2^1 + \mu\left(\beta_2^2 - b_2^2\,\alpha_2^2 - b_1^2\,\alpha_2^1\right)\right\}, \\
\sqrt{g}\,M^{21} &= -B\left\{\beta_2^2 - b_1^1\,\alpha_2^2 + b_2^1\,\alpha_1^2 + \mu\left(\beta_1^1 - b_1^1\,\alpha_1^1 - b_2^1\,\alpha_1^2\right)\right\}, \\
\sqrt{g}\,M^{22} &= B\left\{\beta_1^2 - b_2^2\,\alpha_1^2 + b_1^2\,\alpha_2^2 - \mu\left(\beta_1^2 - b_2^2\,\alpha_1^2 - b_1^2\,\alpha_1^1\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Darin ist $D = \dfrac{E\,h}{1-\mu^2}$ die Dehnungssteifigkeit und

$B = \dfrac{E\,h^3}{1-\mu^2}$ die Biegesteifigkeit.

Die Querkräfte lassen sich nicht in entsprechender Weise durch die Verzerrungsgrößen ausdrücken, da sie infolge der gemachten Annahmen über den Verformungszustand keine Formänderungen erzeugen.

Mit Hilfe von (62) lassen sich die Verzerrungsgrößen durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$ ausdrücken. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_1} = \mathfrak{v}^{\bullet}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \vartheta_2} = \mathfrak{v}', \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_1} = \mathfrak{w}^{\bullet}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \vartheta_2} = \mathfrak{w}' \tag{65}$$

ergeben sich schließlich nach längeren Zwischenrechnungen für die Schnittgrößen die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
N_1^1 = {} & D\left\{g^{11}\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \mu g^{22}\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \tfrac{1+\mu}{2} g^{12}(\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2)\right\} + \\
& + B\left\{\left[b^{11}(b_1^1 - b_2^2) + (2-\mu)\, b^{12} b_2^1\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[\tfrac{1+\mu}{2} b^{11} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2} b^{12} b_2^2\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[b^{11} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2}(b^{12} b_1^1 - b^{22} b_2^1)\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mu b^{12} b_1^2 \mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left[g^{11}(b_1^1 - b_2^2) + \tfrac{3-\mu}{2} g^{12} b_2^1\right]\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[g^{11} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_2^2\right]\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left.\left[g^{11} b_1^2 - \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_1^1\right]\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 + \left[g^{12} b_1^2 - \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_1^2\right]\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right\}, \\[2ex]
N_2^1 = {} & D\,{}^{1}_{2}{}^{\mu}\left\{2 g^{12}\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + g^{11}(\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2)\right\} + \\
& + B\left\{\mu b^{11} b_2^1 \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[\tfrac{1-\mu}{2} b^{11}(b_1^1 - 2 b_2^2) + \tfrac{3-\mu}{2} b^{12} b_2^1\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[\tfrac{1+\mu}{2} b^{12} b_2^1 + \tfrac{1-\mu}{2} b^{11} b_1^1\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \left[b^{22} b_2^1 + (1-\mu)\, b^{11} b_1^2\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \tfrac{1+\mu}{2} g^{11} b_2^1 \mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[g^{12} b_2^1 - \tfrac{1-\mu}{2} g^{11} b_2^2\right]\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left.\left[g^{12} b_2^1 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{11} b_1^1\right]\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 + \left[g^{22} b_2^1 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{11} b_1^2\right]\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right\}, \\[2ex]
N_1^2 = {} & D\,\tfrac{1-\mu}{2}\left\{2 g^{12}\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + g^{22}(\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2)\right\} + \\
& + B\left\{\left[b^{11} b_1^2 + (1-\mu)\, b^{22} b_2^1\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[\tfrac{1+\mu}{2} b^{12} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2} b^{22} b_2^2\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[\tfrac{1-\mu}{2} b^{22}(b_2^2 - 2 b_1^1) + \tfrac{3-\mu}{2} b^{12} b_1^2\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mu b^{22} b_1^2 \mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left[g^{11} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{22} b_2^1\right]\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[g^{12} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{22} b_2^2\right]\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left.\left[g^{12} b_1^2 - \tfrac{1-\mu}{2} g^{22} b_1^1\right]\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{22} b_1^2 \mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right\}, \\[2ex]
N_2^2 = {} & D\left\{g^{22}\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \mu g^{11}\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \tfrac{1+\mu}{2} g^{12}(\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2)\right\} + \\
& + B\left\{\mu b^{12} b_2^1 \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[b^{22} b_2^1 + \tfrac{1-\mu}{2}(b^{11} b_1^2 - b^{12} b_2^2)\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[\tfrac{1+\mu}{2} b^{22} b_2^1 + \tfrac{1-\mu}{2} b^{22} b_1^1\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \left[b^{22}(b_2^2 - b_1^1) + (2-\mu)\, b^{12} b_2^1\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left[g^{12} b_2^1 - \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_2^1\right]\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[g^{22} b_2^1 - \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_2^2\right]\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left.\left[g^{22} b_2^1 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_1^1\right]\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 + \left[g^{22}(b_2^2 - b_1^1) + \tfrac{3-\mu}{2} g^{12} b_1^2\right]\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right\}, \\[2ex]
\sqrt{g}\, M^{11} = {} & -B\left\{\mu g^{11} b_2^1 \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[\tfrac{1-\mu}{2} g^{11}(b_1^1 - 2 b_2^2) + \tfrac{3-\mu}{2} b_2^1 g^{12}\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[\tfrac{1-\mu}{2} g^{11} b_1^1 + \tfrac{1+\mu}{2} g^{12} b_2^1\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \left[g^{22} b_2^1 + (1-\mu)\, g^{11} b_1^2\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left.(1-\mu)\left[g^{11}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 + g^{12}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right]\right\}, \\[2ex]
\sqrt{g}\, M^{12} = {} & B\left\{\left[g^{11}(b_1^1 - b_2^2) + (2-\mu)\, g^{12} b_2^1\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[\tfrac{1+\mu}{2} g^{11} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_2^2\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[g^{11} b_1^2 + \tfrac{1-\mu}{2}(b_2^1 g^{22} - g^{12} b_1^1)\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mu b_1^2 g^{12}\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left. g^{11}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + g^{12}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \mu g^{12}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 + \mu g^{22}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right\}, \\[2ex]
\sqrt{g}\, M^{21} = {} & -B\left\{\mu g^{12} b_2^1 \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[g^{22} b_2^1 + \tfrac{1-\mu}{2}(g^{11} b_1^2 - g^{12} b_2^2)\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[\tfrac{1+\mu}{2} b_2^1 g^{22} + \tfrac{1-\mu}{2} g^{12} b_1^1\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \left[g^{22}(b_2^2 - b_1^1) + (2-\mu)\, g^{12} b_1^2\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left. g^{12}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 + g^{22}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2 + \mu g^{11}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \mu g^{12}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2\right\}, \\[2ex]
\sqrt{g}\, M^{22} = {} & B\left\{\left[g^{11} b_1^2 + (1-\mu)\, g^{22} b_2^1\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \left[\tfrac{1-\mu}{2} g^{22} b_2^2 + \tfrac{1+\mu}{2} g^{12} b_1^2\right]\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + \right. \\
& + \left[\tfrac{1-\mu}{2} g^{22}(b_2^2 - 2 b_1^1) + \tfrac{3-\mu}{2} g^{12} b_1^2\right]\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mu g^{22} b_1^2 \mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \\
& + \left.(1-\mu)\left[g^{12}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + g^{22}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Werden als Parameterkurven die Krümmungslinien der Schalenmittelfläche gewählt, so vereinfacht sich (66) mit $b^{ik} = b_{ik} = b^i_k = g^{ik} = 0$, für $i \neq k$, erheblich, und es wird

$$\left.\begin{aligned}
N^1_1 &= D\left\{g^{11}\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \mu g^{22}\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2\right\} + B\,(b^1_1 - b^2_2)\left\{b^{11}\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + g^{11}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1\right\},\\
N^1_2 &= D\,\tfrac{1-\mu}{2}\,g^{11}\left\{\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2\right\} + B\,\tfrac{1-\mu}{2}\left\{b^{11}(b^1_1 - 2b^2_2)\,\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + b^{11}b^1_1\,\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \right.\\
&\qquad \left. + g^{11}(b^{11}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 - b^2_2\,\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2)\right\},\\
N^2_1 &= D\,\tfrac{1-\mu}{2}\,g^{22}\left\{\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2\right\} + B\,\tfrac{1-\mu}{2}\left\{b^{22}b^2_2\,\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + b^{22}(b^2_2 - 2\,b^1_1)\,\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + \right.\\
&\qquad \left. + g^{22}(b^2_2\,\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 - b^1_1\,\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1)\right\},\\
N^2_2 &= D\left\{g^{22}\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + \mu g^{11}\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1\right\} + B\,(b^2_2 - b^1_1)\left\{b^{22}\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + g^{22}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right\},\\
\sqrt{g}\,M^{11} &= -B\,\tfrac{1-\mu}{2}\left\{g^{11}(b^1_1 - 2\,b^2_2)\,\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + g^{11}b^1_1\,\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + 2\,g^{11}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1\right\},\\
\sqrt{g}\,M^{12} &= B\left\{g^{11}(b^1_1 - b^2_2)\,\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + g^{11}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 + \mu g^{22}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2\right\},\\
\sqrt{g}\,M^{21} &= -B\left\{g^{22}(b^2_2 - b^1_1)\,\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 + g^{22}\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2 + \mu g^{11}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1\right\},\\
\sqrt{g}\,M^{22} &= B\,\tfrac{1-\mu}{2}\left\{g^{22}b^2_2\,\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 + g^{22}(b^2_2 - 2\,b^1_1)\,\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 + 2\,g^{22}\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Die Formeln (66) stellen das allgemeine Elastizitätsgesetz dar, das den Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungen vermittelt.

Nunmehr sind alle Gleichungen und Beziehungen abgeleitet, die eine mathematische Behandlung eines Problems der Schalenbiegetheorie erfordert. Wird nämlich das Elastizitätsgesetz (66) in die Gleichgewichtsbedingungen (39) eingeführt, so ergeben sich zwei vektorielle Differentialgleichungen, aus denen sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen der Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$ und die beiden Querkräfte Q^i ermitteln lassen.

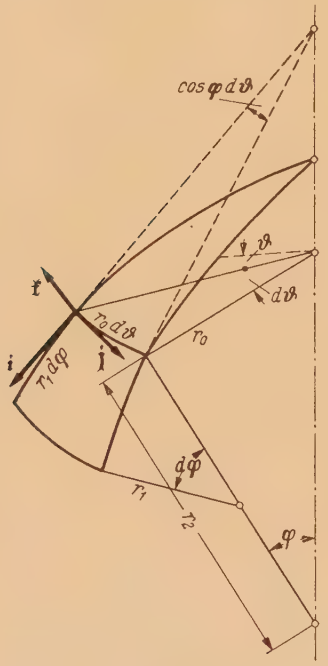


Abb. 5. Element der Mittelfläche einer Rotationsschale.

7. Anwendung der Theorie auf die allgemeine Rotationsschale. Die vorstehend entwickelte Theorie soll nunmehr auf die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen und des Elastizitätsgesetzes der allgemeinen Rotationsschale angewandt werden.

Als Koordinaten werden gewählt: der Winkel φ, den die Schalennormale gegen die Rotationsachse bildet, und der Winkel ϑ, den eine beliebige Meridianrichtung mit einer festen einschließt (Abb. 5). Es stellen somit die Parameterlinien $\varphi =$ konst. die Schar der Breitenkreise und die Parameterlinien $\vartheta =$ konst. die Schar der Meridiane dar. Den bisher benutzten Größen kommen nunmehr folgende Bedeutungen zu

$$\vartheta_1 = \varphi\,, \qquad \vartheta_2 = \vartheta\,.$$

Die Einheitsvektoren tangential an die Meridiane, tangential an die Breitenkreise und in Richtung der Normalen mögen mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezeichnet werden, sie seien so orientiert, daß sie ein Rechtssystem bilden. Weiterhin werden bezeichnet: mit Punkten Ableitungen nach φ, mit Strichen Ableitungen nach ϑ.

Aus Abb. 5 ergeben sich mit den dort benutzten Bezeichnungen ohne weiteres die folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{i}^{\bullet} = \frac{\partial\,\mathfrak{i}}{\partial\,\varphi} = -\,\mathfrak{k}\,, \qquad \mathfrak{i}' = \frac{\partial\,\mathfrak{i}}{\partial\,\vartheta} = \cos\varphi\,\mathfrak{j}\,,$$

$$\mathfrak{j}^{\bullet} = \frac{\partial\,\mathfrak{j}}{\partial\,\varphi} = 0\,, \qquad \mathfrak{j}' = \frac{\partial\,\mathfrak{j}}{\partial\,\vartheta} = -\cos\varphi\,\mathfrak{i} - \sin\varphi\,\mathfrak{k}\,,$$

$$\mathfrak{k}^{\bullet} = \frac{\partial\,\mathfrak{k}}{\partial\,\varphi} = \mathfrak{i}\,, \qquad \mathfrak{k}' = \frac{\partial\,\mathfrak{k}}{\partial\,\vartheta} = \sin\varphi\,\mathfrak{j}\,.$$

Die kovarianten Basisvektoren folgen zu

$$\mathfrak{e}_1 = r_1\,\mathfrak{i}\,, \quad \mathfrak{e}_2 = r_0\,\mathfrak{j} = r_2 \sin\varphi\,\mathfrak{j}\,, \quad \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{k}\,. \tag{68}$$

Für die Maßzahlen des Maßtensors folgt aus (5) und (10) mit (68)

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= r_1^2\,, & g_{12} &= 0\,, & g_{22} &= r_0^2 = r_2^2 \sin^2\varphi\,, \\ g^{11} &= \frac{1}{r_1^2}\,, & g^{12} &= 0\,, & g^{22} &= \frac{1}{r_0^2} = \frac{1}{r_2^2 \sin^2\varphi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Weiterhin ist

$$g = r_1^2\, r_0^2 = r_1^2\, r_2^2 \sin^2\varphi\,.$$

Die Maßzahlen des Krümmungstensors errechnen sich gemäß (6) und (9) zu

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= -r_1, & b_{12} &= 0, & b_{22} &= -r_0 \sin\varphi\,, \\ b_1^1 &= -\frac{1}{r_1}, & b_2^1 &= b_1^2 = 0, & b_2^2 &= -\frac{1}{r_2}, \\ b^{11} &= -\frac{1}{r_1^2}, & b^{12} &= 0\,, & b^{22} &= -\frac{1}{r_2\, r_0^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Die kontravarianten Basisvektoren schreiben sich in der Form

$$\mathfrak{e}^1 = \frac{\mathfrak{i}}{r_1}\,, \qquad \mathfrak{e}^2 = \frac{\mathfrak{j}}{r_0}\,. \tag{71}$$

Für die Ableitungen der kovarianten Basisvektoren ergibt sich aus (68) und der Beziehung $\dot{r}_0 = r_1 \cos\varphi$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{e}}_1 &= \dot{r}_1\,\mathfrak{i} - r_1\,\mathfrak{k}\,, \\ \mathfrak{e}_1' &= r_1 \cos\varphi\,\mathfrak{j} = \dot{r}_0\,\mathfrak{j}\,, \\ \dot{\mathfrak{e}}_2 &= \dot{r}_0\,\mathfrak{j} = r_1 \cos\varphi\,\mathfrak{j}\,, \\ \mathfrak{e}_2' &= -r_0\,(\cos\varphi\,\mathfrak{i} + \sin\varphi\,\mathfrak{k})\,. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Die das Gleichgewicht beschreibende Vektorgleichung lautet ausführlich, wenn die Form (39b) benutzt wird,

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{e}_1\left[\frac{\partial \bar{N}^{11}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \bar{N}^{21}}{\partial\vartheta}\right] + \mathfrak{e}_2\left[\frac{\partial \bar{N}^{12}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \bar{N}^{22}}{\partial\vartheta}\right] + \mathfrak{e}_3\left[\frac{\partial \bar{Q}^1}{\partial\varphi} + \frac{\partial \bar{Q}^2}{\partial\vartheta}\right] + \\ &+ \frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial\varphi}\bar{N}^{11} + \frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial\vartheta}(\bar{N}^{21} + \bar{N}^{12}) + \frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial\vartheta}\bar{N}^{22} + \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial\varphi}\bar{Q}^1 + \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial\vartheta}\bar{Q}^2 + \mathfrak{p}\sqrt{g} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Gleichung (73) wird nunmehr mit den Basisvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ skalar multipliziert. Es ergeben sich drei skalare Gleichungen, die die üblichen Gleichgewichtsbedingungen in Richtung der Meridiantangente, der Breitenkreistangente und der Schalennormalen liefern:

$$\left.\begin{aligned} &r_1^2\frac{\partial \bar{N}^{11}}{\partial\varphi} + r_1^2\frac{\partial \bar{N}^{21}}{\partial\vartheta} + r_1\dot{r}\,\bar{N}^{11} - r_0 r_1 \cos\varphi\,\bar{N}^{12} + r_1\,\bar{Q}^1 + r_1 r_0\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}_1 = 0\,, \\ &r_0^2\frac{\partial \bar{N}^{12}}{\partial\varphi} + r_0^2\frac{\partial \bar{N}^{22}}{\partial\vartheta} + \dot{r}_0\, r_0\,(\bar{N}^{21} + \bar{N}^{12}) + r_0 \sin\varphi\,\bar{Q}^2 + r_1 r_0\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}_2 = 0\,, \\ &\frac{\partial \bar{Q}^1}{\partial\varphi} + \frac{\partial \bar{Q}^2}{\partial\vartheta} - r_1\,\bar{N}^{11} - r_0 \sin\varphi\,\bar{N}^{22} + r_1 r_0\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}_3 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Werden gemäß (34) unter Beachtung von (69) die auf die Längeneinheit bezogenen Schnittgrößen

$$\left.\begin{aligned} &\bar{N}^{11} = \frac{r_0}{r_1}\overset{(0)}{N}{}^{11}, \quad \bar{N}^{12} = \overset{(0)}{N}{}^{12}, \quad \bar{N}^{21} = \overset{(0)}{N}{}^{21}, \quad \bar{N}^{22} = \frac{r_1}{r_0}\overset{(0)}{N}{}^{22}, \\ &\bar{Q}^1 = r_0\overset{(0)}{Q}{}^1, \qquad \bar{Q}^2 = r_1\overset{(0)}{Q}{}^2 \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

eingeführt und

$$\mathfrak{p}\,\mathfrak{i} = p_\varphi\,, \quad \mathfrak{p}\,\mathfrak{j} = p_\vartheta\,, \quad \mathfrak{p}\,\mathfrak{k} = p_\nu$$

gesetzt, so läßt sich (74) in die folgende Gestalt überführen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varphi}(\overset{(0)}{N}{}^{11} r_0) + r_1 \frac{\partial \overset{(0)}{N}{}^{21}}{\partial\vartheta} - r_1 \cos\varphi\, \overset{(0)}{N}{}^{22} + r_0 \overset{(0)}{Q}{}^1 + r_0 r_1 p_\varphi = 0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial\varphi}(r_0 \overset{(0)}{N}{}^{12}) + r_1 \frac{\partial \overset{(0)}{N}{}^{22}}{\partial\vartheta} + r_1 \cos\varphi\, \overset{(0)}{N}{}^{21} + r_1 \sin\varphi\, \overset{(0)}{Q}{}^2 + r_0 r_1 p_\vartheta = 0\,,\\
&-r_0 \overset{(0)}{N}{}^{11} - r_1 \sin\varphi\, \overset{(0)}{N}{}^{22} + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r_0 \overset{(0)}{Q}{}^1) + r_1 \frac{\partial \overset{(0)}{Q}{}^2}{\partial\vartheta} + r_0 r_1 p_\nu = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Um das Momentengleichgewicht aufzustellen, wird von der zweiten Gleichung (39a) ausgegangen. Sie lautet ausführlich geschrieben

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_1\left(\frac{\partial \overline{M}^{11}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \overline{M}^{21}}{\partial\vartheta}\right) + \mathfrak{e}_2\left(\frac{\partial \overline{M}^{12}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \overline{M}^{22}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial\varphi}\overline{M}^{11} + \frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial\vartheta}(\overline{M}^{12} + \overline{M}^{21}) +\\
&+ \frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial\vartheta_1}\overline{M}^{22} + \sqrt{g}\,\left[\mathfrak{e}^1 \overline{Q}^2 - \mathfrak{e}^2 \overline{Q}^1 + \mathfrak{e}_3(\overline{N}^{12} - \overline{N}^{21})\right] = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Multiplikation mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ liefert

$$\left.\begin{aligned}
&r_1^2\left(\frac{\partial \overline{M}^{11}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \overline{M}^{21}}{\partial\vartheta}\right) + r_1 r_1^{\cdot}\, \overline{M}^{11} + r_0 r_1 \overline{Q}^2 - r_0 r_1 \cos\varphi\, \overline{M}^{22} = 0\,,\\
&r_0^2\left(\frac{\partial \overline{M}^{12}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \overline{M}^{22}}{\partial\vartheta}\right) + r_0 r_0^{\cdot}\,(\overline{M}^{12} + \overline{M}^{21}) - r_0 r_1 \overline{Q}^1 = 0\,,\\
&-r_1 \overline{M}^{11} - r_0 \sin\varphi\, \overline{M}^{22} + r_0 r_1 (\overline{N}^{12} - \overline{N}^{21}) = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Einführung der auf die Längeneinheit bezogenen Schnittgrößen gemäß (34)

$$\overline{M}^{11} = \frac{r_0}{r_1}\overset{(0)}{M}{}^{11}, \quad \overline{M}^{12} = \overset{(0)}{M}{}^{12}, \quad \overline{M}^{21} = \overset{(0)}{M}{}^{21}, \quad \overline{M}^{22} = \frac{r_1}{r_0}\overset{(0)}{M}{}^{22} \tag{79}$$

bringt schließlich die Gleichgewichtsbedingungen (78) in die Gestalt

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varphi}(r_0 \overset{(0)}{M}{}^{11}) + r_1 \frac{\partial \overset{(0)}{M}{}^{21}}{\partial\vartheta} - r_1 \cos\varphi\, \overset{(0)}{M}{}^{22} - r_0 r_1^{\cdot}\, \overset{(0)}{Q}{}^2 = 0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial\varphi}(r_0 \overset{(0)}{M}{}^{12}) + r_1 \frac{\partial \overset{(0)}{M}{}^{22}}{\partial\vartheta} + r_1 \cos\varphi\, \overset{(0)}{M}{}^{21} - r_0 r_1\, \overset{(0)}{Q}{}^1 = 0\,,\\
&-r_0 \overset{(0)}{M}{}^{11} - r_1 \sin\varphi\, \overset{(0)}{M}{}^{22} + r_0 r_1 (\overset{(0)}{N}{}^{12} - \overset{(0)}{N}{}^{21}) = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Die Gleichungen (76) und (80) stimmen mit den bei *Flügge*[1] zu findenden überein, wenn von Unterschieden in den Vorzeichen abgesehen wird, die auf das hier benutzte von *Flügge* abweichende Dreibein $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ sowie auf eine etwas andere Definition der positiven Richtungen der Momente zurückzuführen sind.

Um das Elastizitätsgesetz aufzustellen, wird von dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$ ausgegangen. Werden seine Maßzahlen in Richtung der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ mit u, v, w bezeichnet, so lautet seine Komponentendarstellung

$$\mathfrak{v} = u\,\mathfrak{i} + v\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k}\,. \tag{81}$$

Damit ergibt sich dann weiterhin

$$\mathfrak{v}^{\cdot} = \mathfrak{i}\,(u^{\cdot} + w) + \mathfrak{j}\,v^{\cdot} + \mathfrak{k}\,(w^{\cdot} - u)\,, \tag{82}$$

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{i}\,(u' - v\cos\varphi) + \mathfrak{j}\,(u\cos\varphi + v' + w\sin\varphi) + \mathfrak{k}\,(w' - v\sin\varphi)\,. \tag{83}$$

Der Vektor $\mathfrak{w}$ läßt sich nun gemäß (47) leicht bestimmen, es ist

$$\mathfrak{w} = -\frac{1}{r_1}(w^{\cdot} - u)\,\mathfrak{i} - \frac{1}{r_0}(w' - v\sin\varphi)\,\mathfrak{j} \tag{84}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{w}^{\cdot} &= -\left(\frac{w^{\cdot} - u}{r_1}\right)^{\cdot}\mathfrak{i} - \left(\frac{w' - v\sin\varphi}{r_0}\right)^{\cdot}\mathfrak{j} + \frac{w^{\cdot} - u}{r_1}\,\mathfrak{k}\,,\\
\mathfrak{w}' &= \left[\frac{w'\operatorname{ctg}\varphi - v\cos\varphi}{r_2} - \left(\frac{w^{\cdot} - u}{r_1}\right)'\right]\mathfrak{i} - \left[\frac{w^{\cdot} - u}{r_1}\cos\varphi + \left(\frac{w' - v\sin\varphi}{r_0}\right)'\right]\mathfrak{j} - \frac{w' - v\sin\varphi}{r_2}\,\mathfrak{k}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen S. 145, 146, Berlin 1934.

Da die Parameterkurven Krümmungslinien sind, kann das Elastizitätsgesetz in der Form (67) verwendet werden. Die dort auftretenden skalaren Produkte lassen sich mit (82), (83), (85) und unter Beachtung von (68) sofort hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 = r_1(u^{\bullet}+w), && \mathfrak{v}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 = r_0 v^{\bullet},\\
&\mathfrak{v}'\mathfrak{e}_1 = r_1(u'-v\cos\varphi), && \mathfrak{v}'\mathfrak{e}_2 = r_0(u\cos\varphi+v'-w\sin\varphi),\\
&\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_1 = -r_1\left(\frac{w^{\bullet}-u}{r_1}\right)^{\bullet} = -w^{\bullet\bullet}+u^{\bullet}+\frac{r_1^{\bullet}}{r_1}(w^{\bullet}-u),\\
&\mathfrak{w}^{\bullet}\mathfrak{e}_2 = -r_0\left(\frac{w'-v\sin\varphi}{r_0}\right)^{\bullet} = -w'^{\bullet}+\frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi\, w'+\frac{r_0}{r_2}v^{\bullet}-\frac{r_0}{r_2^2}(r_1-r_2)\operatorname{ctg}\varphi\, v,\\
&\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_1 = r_1\left[\frac{w'\operatorname{ctg}\varphi-v\cos\varphi}{r_2}-\left(\frac{w^{\bullet}-u}{r_1}\right)'\right] = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi^{\bullet}w'-\frac{r_1}{r_2}\cos\varphi\, v-w'^{\bullet}+u',\\
&\mathfrak{w}'\mathfrak{e}_2 = -r_0\left[\frac{w^{\bullet}-u}{r_1}\cos\varphi+\left(\frac{w'-v\sin\varphi}{r_0}\right)'\right] = -\frac{r_0}{r_1}\cos\varphi\, w^{\bullet}+\frac{r_0}{r_1}\cos\varphi\, u-w''+v'\sin\varphi.
\end{aligned}\right\}\quad(86)$$

Wird jetzt (86) in (67) eingesetzt und (34) beachtet, so ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(0)}{N}{}^{11} = N_1^1 = D\left\{\frac{u^{\bullet}+w}{r_1}+\mu\left[\frac{w+u\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}+\frac{v'}{r_0}\right]\right\}-B\frac{r_1-r_2}{r_1^3 r_2}\left\{\frac{r_1^{\bullet}}{r_1}(u+w^{\bullet})+w^{\bullet\bullet}+w\right\},\\
&\overset{(0)}{N}{}^{12} = \frac{r_1}{r_0}N_2^1 = D\frac{1-\mu}{2}\left\{\frac{v^{\bullet}}{r_1}+\frac{u'}{r_0}-\frac{v\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}\right\}+B\frac{1-\mu}{2}\left\{\left(\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}\right)^2\left(\frac{v^{\bullet}}{r_1}-\frac{v\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r_1-r_2}{r_0 r_1 r_2}\left(\frac{w'\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}-\frac{w'^{\bullet}}{r_1}\right)\right\},\\
&\overset{(0)}{N}{}^{21} = \frac{r_0}{r_1}N_1^2 = D\frac{1-\mu}{2}\left\{\frac{v^{\bullet}}{r_1}+\frac{u'}{r_0}-\frac{v\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}\right\}+B\frac{1-\mu}{2}\left\{\left(\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}\right)^2\frac{u'}{r_0}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{r_1-r_2}{r_0 r_1 r_2}\left(\frac{w'\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}-\frac{w'^{\bullet}}{r_1}\right)\right\},\\
&\overset{(0)}{N}{}^{22} = N_2^2 = D\left\{\frac{u\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}+\frac{v'}{r_0}+\frac{w}{r_2}+\mu\frac{u^{\bullet}+w}{r_1}\right\}+B\left\{\left(\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}\right)^2\frac{u}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}\left(\frac{w}{r_2^2}+\frac{w'\operatorname{ctg}\varphi}{r_1 r_2}+\frac{w''}{r_0^2}\right)\right\},\\
&\overset{(0)}{M}{}^{11} = \frac{r_1}{r_0}\sqrt{g}\,M^{11} = B(1-\mu)\left\{\frac{1}{r_0 r_1}\left(w^{\bullet\bullet}-\frac{1}{2}u'\right)+\frac{r_2-2r_1}{r_1^2 r_2}\frac{v^{\bullet}}{2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2r_1-r_2}{r_1 r_2^2}\operatorname{ctg}\varphi\frac{v}{2}-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_0 r_2}w'\right\},\\
&\overset{(0)}{M}{}^{12} = \sqrt{g}\,M^{12} = -B\left\{\frac{w^{\bullet\bullet}}{r_1^2}+\frac{\mu}{r_0}\left(\frac{w''}{r_0}-\frac{v'}{r_2}\right)-\frac{u^{\bullet}}{r_1 r_2}+\frac{u-w^{\bullet}}{r_1}\left(\frac{r_1^{\bullet}}{r_1^2}-\mu\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{r_1-r_2}{r_1^2 r_2}w\right\},\\
&\overset{(0)}{M}{}^{21} = \sqrt{g}\,M^{21} = B\left\{\frac{w''}{r_0^2}+\frac{\mu}{r_1^2}(w''-u^{\bullet})+\frac{w^{\bullet}}{r_1}\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}-\mu\frac{r_1^{\bullet}}{r_1^2}\right)-\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2^2}w-\right.\\
&\qquad\left.-u\left(\frac{2r_2-r_1}{r_1 r_2^2}\operatorname{ctg}\varphi-\mu\frac{r_1^{\bullet}}{r_1^3}\right)\right\},\\
&\overset{(0)}{M}{}^{22} = \frac{r_0}{r_1}\sqrt{g}\,M^{22} = B(1-\mu)\left\{\frac{v^{\bullet}}{2r_1 r_2}-\frac{w'^{\bullet}}{r_0 r_1}-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_2^2}\frac{v}{2}+\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_0 r_2}w'+\frac{2r_2-r_1}{r_0 r_1 r_2}\frac{u'}{2}\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(87)$$

Die Ausdrücke (87) stellen das allgemeine Elastizitätsgesetz der Rotationsschale dar, das zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (76) und (80) das vollständige System von Gleichungen zur Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes der allgemeinen

Rotationsschale bildet. Die bekannten Ausdrücke für die in der Literatur behandelten Sonderfälle[1] sind darin enthalten.

8. Zusammenfassung. Es werden die Grundlagen der Schalenbiegetheorie entwickelt, indem unter Verwendung der Vektor- und Tensorrechnung im Rahmen der klassischen Elastizitätstheorie allgemeingültige Formeln abgeleitet werden. Sie gestatten insbesondere die Benutzung eines jeden beliebigen schiefwinkligen oder rechtwinkligen Koordinatensystems.

Nach einer kurzen Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen aus der Differentialgeometrie der Flächen werden zunächst die Schnittgrößen neu definiert und zwei vektorielle Differentialgleichungen aufgestellt, die das Gleichgewicht am Schalenelement beschreiben. Es werden dann die Verzerrungsgrößen bestimmt und ihr Zusammenhang mit den Schnittgrößen gewonnen. Schließlich wird das Elastizitätsgesetz, das den Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungen vermittelt, aufgestellt. Es zeigt sich, daß die gefundenen Ergebnisse trotz der großen Allgemeingültigkeit sehr übersichtlich und für die Anwendungen einfach zu handhaben sind, was am Beispiel der Rotationsschale noch näher ausgeführt wird.

(Eingegangen am 24. April 1948.)

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. *Wolfgang Zerna*, 10, North Parade, Whitley Bay, Northumberland, England.

---

[1] Vgl. z. B. *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, S. 149, Berlin 1934, und *A. Havers*, Ing.-Arch. 6 (1935), S. 282.

Einführung in die Atomphysik

Von

Prof. Dr. Wolfgang Finkelnburg

Mit 193 Abbildungen. VIII, 339 Seiten. 1948.

M 28.—

INHALTSÜBERSICHT.

Einleitung. Die Bedeutung der Atomphysik für Wissenschaft und Technik — Die Methodik der atomphysikalischen Forschung — Schwierigkeit, Gliederung und Darstellung der Atomphysik.

Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne. Belege für die Atomistik der Materie und der Elektrizität — Masse, Größe und Zahl der Atome. Das Periodische System der Elemente — Belege für den Aufbau der Atome aus Kern und Elektronenhülle. Allgemeines über Atommodelle — Freie Elektronen und Ionen — Überblick über den Aufbau der Atomkerne — Die Isotopie.

Atomspektren und Atombau. Aufnahme, Auswertung und Einteilung der Spektren — Serienformeln und Termdarstellung von Linienspektren — Die Grundvorstellungen und Postulate der *Bohr*schen Atomtheorie — Die Anregung von Quantensprüngen durch Stöße — Das Wasserstoffatom und seine Spektren nach der *Bohr*schen Theorie — Atomvorgänge und ihre Umkehrung. Ionisation und Wiedervereinigung. Kontinuierliche Atomspektren und ihre Deutung — Die Spektren der wasserstoffähnlichen Ionen und der spektroskopische Verschiebungssatz — Die Röntgenspektren, ihre atomtheoretische Deutung und ihr Zusammenhang mit den optischen Spektren — Die Spektren der Alkaliatome und ihre Deutung. Termfolgen — Die Spektren der Mehrelektronenatome und ihre Termsymbole. Multiplizitätssysteme und Mehrfachanregung — Metastabile Zustände — Der Elektronenspin und die Systematik der Atomzustände (Die Theorie der Multipletts) — Die atomtheoretische Deutung der magnetischen Eigenschaften der Atome — Atome im elektrischen und magnetischen Feld. Richtungsquantelung und Orientierungsquantenzahl — Korrespondenzprinzip und Linienintensitäten — Die atomtheoretische Erklärung des Periodischen Systems der Elemente — Die Hyperfeinstruktur der Atomlinien. Isotopie-Effekte und Einfluß des Kernspins — Die natürliche Breite der Spektrallinien und ihre Beeinflussung durch innere und äußere Störungen.

Die quantenmechanische Atomtheorie. Der Übergang von der *Bohr*schen zur quantenmechanischen Atomtheorie — Der Welle-Teilchen-Dualismus beim Licht und bei der Materie — Die *Heisenberg*sche Unbestimmtheitsbeziehung — *De Broglies* Materiewellen und ihre Bedeutung für die *Bohr*sche Atomtheorie — Die Grundgleichungen der Wellenmechanik. Eigenwerte und Eigenfunktionen. Die Matrizenmechanik und ihr Verhältnis zur Wellenmechanik — Die Bedeutung der wellenmechanischen Ausdrücke, Eigenfunktionen und Quantenzahlen. Spektrale Intensität und Übergangswahrscheinlichkeit — Beispiele für die wellenmechanische Behandlung atomarer Systeme — Wechselwirkung gekoppelter atomarer Systeme. Austauschresonanz und Austauschenergie — Der quantenmechanische Tunneleffekt (Der Durchgang durch einen Potentialwall) — Die *Fermi*sche Quantenstatistik — Leistungen, Grenzen und philosophische Bedeutung der Quantenmechanik.

Die Physik der Atomkerne. Die Kernphysik im Rahmen der allgemeinen Atomphysik — Experimentelle Methoden der Atomkernforschung — Allgemeine Eigenschaften und Aufbau der Atomkerne. Massendefekt und Bindungsenergie — Natürliche und künstliche Radioaktivität und aus ihr erschlossene Kernvorgänge — Allgemeines über erzwungene Kernumwandlungen und ihren Ablauf — Erzeugung, Eigenschaften und Nachweis des Neutrons — Die Ausbeute erzwungener Kernumwandlungen — Die Uranspaltung — Thermische Kernreaktionen bei höchsten Temperaturen im Innern der Sterne. Die Frage nach der Entstehung der Elemente — Anwendungen der Kernphysik, insbesondere der künstlichen Kernumwandlungen — Aufbau und Systematik der Atomkerne — Stoßvorgänge höchster Energie bei der Höhenstrahlung — Kernkräfte und Theorie der Elementarteilchen — Das Problem der universellen Naturkonstanten.

Physik der Moleküle. Ziel der Molekülphysik und Zusammenhang mit der Chemie — Methoden der Molekülforschung — Allgemeines über Aufbau, Struktur und Bedeutung von Molekülspektren — Die Systematik der Elektronenterme zweiatomiger Moleküle — Schwingung und Schwingungsspektren zweiatomiger Moleküle — Zerfall und Bildung zweiatomiger Moleküle und ihr Zusammenhang mit den kontinuierlichen Molekülspektren — Grenzen des Molekülbegriffs. *Van der Waals*-Moleküle und Stoßpaare — Die Molekülrotation und die Ermittlung von Trägheitsmomenten und Kernabständen aus der Rotationsstruktur der Spektren zweiatomiger Moleküle — Bandenintensitäten und bandenspektroskopische Temperaturbestimmung — Isotopiemessungen an Molekülspektren — Überblick über Spektren und Bau vielatomiger Moleküle — Die physikalische Erklärung der chemischen Bindung.

Der flüssige und feste Zustand der Materie vom Standpunkt der Atomphysik. Allgemeines über die Struktur des flüssigen und des festen Zustands der Materie — Ideale und reale Kristalle. Strukturempfindliche und strukturunempfindliche Kristalleigenschaften — Der Kristall als Makromolekül. Ionengitter, Atomgitter und Molekülgitter — Kristallsysteme und Strukturanalyse — Gitterenergie, Elastizität, Kompressibilität und Wärmeausdehnung von Ionenkristallen — Überblick über Bindung und Eigenschaften des metallischen Zustands — Kristallschwingungen und die Ermittlung ihrer Frequenzen aus Ultrarotspektrum und Ramaneffekt-Elektronenanordnung und Elektronensprungspektren im Kristall. Das Energiebändermodell — Besetzte und nicht vollbesetzte Energiebänder im Kristall. Isolator und elektrischer Leiter im Energiebändermodell — Das Potentialtopfmodell des Metalls. Austrittsarbeit, Glühemission, Feldemission, Berührungsspannung — Ferromagnetismus als Kristalleigenschaft — Gitterfehler, Diffusion und Ionenwanderung in Kristallen — Elektronenleitung und innerer Photoeffekt in Halbleiterkristallen — Absorption und Elektronenwanderung in Halogenidkristallen. Der photographische Elementarprozeß — Die Lumineszenz von Kristallphosphoren — Stoßvorgänge an festen Oberflächen.

Tabelle der für die Atomphysik wichtigsten Konstanten und Beziehungen.

Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Redigiert in Gemeinschaft mit

F. Hund

von

Ferdinand Trendelenburg

Einundzwanzigster Band

Mit 188 Abbildungen. III, 361 Seiten. 1945.

M 48.—

INHALTSVERZEICHNIS.

Neuere Fortschritte der Theorie des inneren Aufbaues und der Entwicklung der Sterne. Von Dr. *L. Biermann*, Berlin-Babelsberg.

Elektrische Leitfähigkeit der Metalle bei tiefen Temperaturen. Von Professor Dr. *E. Grüneisen*, Marburg a. d. Lahn. **Supraleitfähigkeit.** Von Regierungsrat Professor Dr. *E. Justi*, Berlin, und Dr. *K. H. Koch*, Wien.

Anregungsstufen der leichten Atomkerne. Von Dozent Dr. *H. Volz*, Erlangen.

Die elektronenmikroskopische Untersuchung von Oberflächen. Von Dr.-Ing. *H. Mahl*, Berlin-Reinickendorf.

Die Messung mechanischer und akustischer Widerstände. Von Professor Dr. *K. Schuster*, Breslau.

Kleines Lehrbuch der Physik

ohne Anwendung höherer Mathematik

Von

Wilhelm H. Westphal

Berlin

Mit 283 Abbildungen. VIII, 251 Seiten. 1948.

Halbleinen M 9.60

INHALTSÜBERSICHT.

Einleitung.

Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper. Bewegungslehre — Kraft. Bewegungsgröße — Arbeit und Energie — Kreisbewegung. Kräftepaare. Schwingungen — Die Gravitation.

Mechanik der Stoffe. Aufbau und allgemeine mechanische Eigenschaften der Stoffe — Mechanik ruhender Flüssigkeiten und Gase — Mechanik strömender Flüssigkeiten und Gase — Wellen. Schwingungen von Körpern.

Wärmelehre. Wesen der Wärme. Temperatur. Wärmemenge — Änderungen des Aggregatzustandes — Wärme und Arbeit.

Elektrostatik. Elektrische Ströme. Elektrostatik — Elektrische Ströme in festen und flüssigen Leitern — Elektrische Ströme in Gasen.

Magnetismus und Elektrodynamik. Magnete. Magnetische Felder — Elektromagnetische Wechselwirkungen — Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe — Strom- und Spannungsmesser. Induktor — Wechselstrom. Elektrische Schwingungen und Wellen.

Die Lehre vom Licht und allgemeine Strahlungslehre. Allgemeines — Strahlenoptik — Wellenoptik — Das gesamte elektromagnetische Spektrum — Quantenoptik. Materiewellen.

Die Atome. Die Atomhülle — Die Atomkerne.

Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.